



Modélisation du comportement mécanique des composites a matrice céramique : développement du réseau de fissures

Audrey Coradi

► To cite this version:

Audrey Coradi. Modélisation du comportement mécanique des composites a matrice céramique : développement du réseau de fissures. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Bordeaux, 2014. Français. <NNT : 2014BORD0267>. <tel-01186644>

HAL Id: tel-01186644

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01186644>

Submitted on 25 Aug 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE
L'INGÉNIEUR
SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE ET INGÉNIERIE

Par Audrey CORADI

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT
MÉCANIQUE DES COMPOSITES À MATRICE
CÉRAMIQUE
Développement du réseau de fissures

Sous la direction de : Éric MARTIN
(co-directeur : Olivier CATY)

Soutenue le 18 novembre 2014

Membre du Jury :

M. LEGUILLON, Dominique	Directeur de Recherche à l'université Pierre et Marie Curie de Paris 6	Président
M. LI, Jia	Professeur à l'université de Paris 13	Rapporteur
M. THIONNET, Alain	Professeur à l'université de Bourgogne	Rapporteur
M. LACOSTE, Éric	Professeur à l'université de Bordeaux	Examineur
M. VANDELLOS, Thomas	Ingénieur HERAKLES au Haillan	Examineur
M. DAMAMME, Gilles	Directeur de Recherche au CEA de Gramat	Examineur
M. MARTIN, Éric	Professeur à l'IPB de Bordeaux	Directeur de thèse
M. CATY, Olivier	Maître de Conférence à l'IPB de Bordeaux	Directeur de thèse

Titre : Modélisation du comportement mécanique des composites à matrice céramique : développement du réseau de fissures

Résumé :

Les matériaux composites à matrice céramique (CMC) sont élaborés à partir de constituants fragiles. Le comportement mécanique et le développement de la fissuration dépendent des propriétés des constituants élémentaires des CMC. La connaissance de l'influence de ces propriétés sur l'évolution de la fissuration et du comportement mécanique fournit une aide au concepteur de matériaux composites.

L'objectif de ce travail est de modéliser l'évolution du réseau de fissures au sein du CMC sollicité en traction, à l'échelle du fil et à l'échelle du composite tissé. L'approche proposée est une alternative aux principaux modèles de comportement des CMC.

A l'échelle du fil, l'endommagement intervient d'abord sous forme de fissures matricielles accompagnées de décohésions à l'interface fibre/matrice. Les analyses de ces deux mécanismes ont permis d'exprimer leur évolution au sein du fil en traction. Le comportement en traction résultant de l'endommagement et l'ouverture de la fissure matricielle sont aussi exprimés semi-analytiquement. Les comparaisons avec un modèle numérique de zones cohésives et avec les essais expérimentaux montrent une bonne corrélation des résultats.

Enfin ces expressions à l'échelle du fil sont utilisées pour modéliser l'endommagement du fil longitudinal au sein du composite tissé en traction. De plus, un outil numérique est développé pour modéliser la fissuration matricielle inter-fil dans le composite tissé.

Mots clés : Composites à matrice céramique ; Fissures ; Mécanique de la rupture ; Modèles d'endommagement ; Comportement mécanique ; Modèles de Zones Cohésives

Title : Damage model for the mechanical behaviour of ceramic matrix composite materials : crack networks development

Abstract :

Ceramic matrix composite materials (CMC) are elaborated from fragile constituents. Their mechanical behaviour and crack growing depend on the properties of the CMC elementary constituent. Knowing the influence of these properties on crack development and mechanical behaviour provides support to the composite material designer.

This work aims at modelling the crack networks development within the CMC under axial tension, at the yarn scale as well as at the woven composite scale. The proposed approach is an alternative to the main CMC behaviour models.

At the yarn scale, matrix cracking with interfacial debonding between fiber and matrix first happen. Both mechanisms are analysed and their development are expressed. The mechanical behaviour resulting from damage and the crack opening displacement are also described using semi-analytical equations. Comparisons with numerical cohesive zone model and also with experimental testing shows good correlation between results.

These semi-analytical expressions are then used for modelling damage within each yarns at the woven composite scale. In addition, a numerical tool is developed for matrix cracking and interfacial debonding between yarns of the woven composite.

Keywords : Ceramic Matrix Composite Materials ; Crack development ; Damage models ; Mechanical behaviour ; Cohesive Zone Models

Unité de recherche

Laboratoire des Composites Thermostructuraux (LCTS) - UMR 5801
(UB/CNRS/SAFRAN/CEA) - 3 Allée de la Boétie, 33600 Pessac

REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée au sein du Laboratoire des Composites Thermostructuraux (LCTS, UMR 5801 - UB, CNRS, SAFRAN Herakles, CEA) de l'Université de Bordeaux. Je remercie vivement Francis TEYSSANDIER, directeur du LCTS, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude et ma reconnaissance à Éric MARTIN , mon directeur de thèse, pour la qualité de ses conseils et l'expérience dont il a su me faire bénéficier. Son avis et expertise m'a permis de mener à bien cette étude.

Je remercie par la même occasion Olivier CATY, co-encadrant de ces travaux, pour ses conseils et son aide lors des exploitations expérimentales.

Je tiens à remercier vivement Dominique LEGUILLON (Directeur de Recherche à l'université Pierre et Marie Curie de Paris 6) d'avoir accepté de présider mon jury de thèse, ainsi que Jia LI (Professeur à l'université de Paris 13) et Alain THIONNET (Professeur à l'université de Bourgogne) d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mes travaux.

Je suis très reconnaissante envers Gilles DAMAMME, Directeur de Recherche au CEA, pour sa forte implication concernant l'évolution et la finalisation de ces travaux ainsi que pour avoir accepté l'invitation à sa participation à mon jury. Sans oublier les ingénieurs du CEA de Gramat qui ont largement contribué à l'achèvement de ces travaux. Il sont a présent mes collègues et collaborateurs.

De même, je suis reconnaissante envers Thomas VANDELLOS, Anne MOURETet Florent BOUILLON, Ingénieurs HERAKLES, pour leurs interventions à l'obtention de résultats scientifiques proches des besoins industriels.

Je remercie Frédéric MAHDI et Antoine DELETTRE, les stagiaires ayant travaillé sur des sujets numériques de mes travaux de thèse.

Je tiens, enfin, à témoigner toute mon amitié aux personnes qui, par leur sympathie, leurs encouragements et leur bonne humeur, ont rendu le plus agréable possible mon séjour au LCTS.

Table des matières

RÉSUMÉ/ABSTRACT	3
REMERCIEMENTS	5
Présentation générale	13
<hr/>	
Chapitre 1	
Modélisation de l'endommagement d'un minicomposite "idéal" : fissuration matricielle et décohésion interfaciale	25
Introduction	27
I Modélisation de l'amorçage et de la propagation de fissures :	
Eléments de bibliographie	28
I.1 Approches énergétiques	28
I.2 Modèle de Zones Cohésives	30
II Mécanisme de fissuration matricielle	31
II.1 Propriétés mécaniques du minicomposite endommagé	31
II.2 Emploi d'un modèle de Zones Cohésives (MZC)	39
II.3 Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée	43
III Mécanisme de décohésion interfaciale au droit d'une fissure matricielle, sans frottement	47
III.1 Modélisation fondée sur la mécanique de la rupture	47
III.2 Utilisation d'un Modèle de Zones Cohésives	53
III.3 Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée	62
III.4 Propagation de la décohésion sans frottement : bilan	66
Conclusion	67
Bibliographie	71

Chapitre 2**Modélisation de l'endommagement d'un minicomposite "idéal" :
décohésion interfaciale avec glissement frottant 73**

Introduction	75
I Eléments de bibliographie	75
II Modèle de zones cohésives pour la propagation de la décohésion avec frottement	79
II.1 Modification du Modèle de Zones Cohésives pour le glissement frottant	79
II.2 Influence du glissement frottant sur la réponse en traction monotone	82
III Modèle semi-analytique du minicomposite en traction lors de la propagation de la décohésion avec frottement	83
III.1 Modèle analytique de la propagation de la décohésion interfaciale	84
III.2 Correction pour la redistribution des contraintes au droit de la décohésion	86
III.3 Comparaison avec le modèle de zones cohésives	89
IV Longueur de décohésion au cours de la traction monotone	91
IV.1 Comparaison avec le modèle de rechargement linéaire	92
IV.2 Influence de l'énergie de rupture de l'interface	94
IV.3 Influence du type de conditions aux limites	95
IV.4 Influence des coefficients de Poisson	96
V Ouverture de fissure au cours de la traction monotone	97
V.1 Expression semi-analytique	97
V.2 Comparaison avec le Modèle de Zones Cohésives	98
VI Traction cyclée, modélisation des boucles d'hystérésis	99
VI.1 Méthode Eléments Finis pour la modélisation des boucles	99
VI.2 Caractérisation du module tangent : Relations avec l'endommagement et le frottement	100
VI.3 Loi d'évolution du module tangent et des boucles d'hystérésis	103
VI.4 Bilan	104
Conclusion	107
Bibliographie	109

Chapitre 3**Modèle de comportement en traction d'un minicomposite SiC/SiC 111**

Introduction	112
---------------------	-----

I	Multifissuration du minicomposite en traction : modèle par tirages aléatoires	113
I.1	Schéma de résolution de la multifissuration du minicomposite	114
I.2	Comparaison avec le modèle de zones cohésives	115
I.3	Influence de la longueur du minicomposite	116
I.4	Probabilité de rupture d'un volume de matrice	117
I.5	Comportement en traction avec la loi statistique pour la multifissuration de la matrice	119
II	Comportement moyen et expression de la densité de fissuration	121
II.1	Expression de la densité de fissures matricielles	121
II.2	Comparaison avec des précédents modèles statistiques	124
II.3	Influence des propriétés sur le comportement en traction	126
II.4	Bilan	132
III	Identification de l'énergie à rupture de l'interface, du coefficient de frottement et des paramètres de la loi de fissuration matricielle	133
III.1	Essais de traction sur minicomposites	133
III.2	Identification des propriétés	135
IV	Ouvertures de fissures	138
	Conclusion	139
	Bibliographie	140

Chapitre 4

Loi de comportement d'un minicomposite SiC/SiC et rupture en traction 141

	Introduction	142
I	Loi de comportement du minicomposite	143
I.1	Démarche et hypothèses	143
I.2	Volume élémentaire représentatif du fil endommagé	144
I.3	Analyse Eléments Finis	147
I.4	Evolution des propriétés élastiques du minicomposite	150
I.5	Procédure automatique pour le calcul des propriétés élastiques	155
I.6	Ecriture explicite de la loi de comportement du fil	156
I.7	Bilan	158
II	Rupture du minicomposite ou du fil en traction	159
II.1	Modèle de zones cohésives et approche statistique de la rupture	159
II.2	Rupture successive des fibres	161
II.3	Contrainte à rupture du volume élémentaire	164
II.4	Rupture : Bilan et perspectives	168
	Conclusion	169

Bibliographie	170
<hr/>	
Chapitre 5	
Modélisation du comportement mécanique en traction d'un compo- site SiC/SiC	171
Introduction	172
I Microstructure et endommagement du composite tissé	173
I.1 Hétérogénéité de la microstructure	173
I.2 Endommagement sous chargement mécanique	173
II Les modèles d'endommagement existants	174
II.1 Approches phénoménologiques	174
II.2 Approches multiéchelles	175
II.3 Prédiction de la durée de vie	176
III Simulation du comportement en traction d'un composite SiC/SiC	177
III.1 Choix de la cellule élémentaire	177
III.2 Modélisation de la fissuration matricielle	178
III.3 Modélisation de la décohésion interfaciale	181
III.4 Endommagement des fils longitudinaux	184
Conclusion	186
Bibliographie	188
<hr/>	
Conclusion générale	189
<hr/>	
Annexes	193
Annexe A	
Répartition des contraintes au voisinage de la décohésion interfaciale	194
Annexe B	
Modélisation des mécanismes de fissuration matricielle :	
Mécanique de la rupture incrémentale	201
Annexe C	
Propagation de la décohésion avec frottement :	
Comparaison avec le modèle de rechargement linéaire	211
Annexe D	
Modélisation des boucles d'hystérésis :	
Influence de l'endommagement et du frottement	213

Annexe E

Coefficients de Hutchinson et Jensen	222
---	------------

Annexe F

Expression de la déformation axiale du microcomposite en traction	225
--	------------

Annexe G

Modèle de minicomposite en traction par discrétisation de la matrice : Schéma de résolution	241
--	------------

Annexe H

Comparaison avec le modèle micromécanique de EVANS	248
---	------------

Présentation générale

Les **matériaux composites à matrice céramique** (CMC) sont destinés à être utilisés dans des conditions d'environnement sévères (haute température, milieux oxydants). Grâce à leurs propriétés thermomécaniques remarquables, leur emploi est envisagé en tant qu'éléments structuraux pour des applications aéronautiques et spatiales, ainsi que nucléaires. Suivant les applications ils sont soumis à des températures de fonctionnement allant de 400 à plus de 2000°C dans des atmosphères oxydantes. Ils peuvent subir des contraintes allant de simples vibrations à des contraintes multiaxiales. L'avantage majeur des CMC par rapport aux pièces métalliques réside dans un allègement conséquent de la structure. L'utilisation de ces composites impose le développement de familles de CMC toujours plus performantes et plus fiables.

Leurs propriétés mécaniques et thermiques sont issues non seulement de la nature des constituants du CMC, mais aussi des mécanismes complexes régissant le comportement et la rupture de ces composites.

Les matériaux céramiques ont été choisis en raison de leurs propriétés (haut module, bonne tenue en température, bonne résistance à l'oxydation) pouvant satisfaire les exigences des applications à haute température. Pour remédier à la **fragilité des céramiques**, les CMC sont élaborés à partir de fibres de carbone ou de carbure de silicium, sur lesquelles est déposée une interphase fibre/matrice en pyrocarbone, avant la formation de la matrice céramique. Cette interphase dévie les fissures matricielles protégeant ainsi le renfort constitué par les fibres. Ainsi, au lieu de subir une rupture fragile et prématurée du matériau, on observe une multifissuration progressive responsable du **comportement endommageable** non linéaire des CMC.

A haute température, les fissures matricielles créées au cours de l'endommagement favorisent la diffusion de l'oxygène vers les points sensibles du composite que sont d'abord les interphases entre fibres et matrice puis le renfort, ce qui réduit la durée de vie du CMC.

Les fibres doivent avoir une résistance à la rupture et un module élastique les plus élevés possibles, associés à une bonne résistance à la fatigue et une faible densité (pour les applications aéronautiques et spatiales). Selon le type d'utilisation, elles doivent également présenter une bonne résistance à l'oxydation, au fluage et à la fissuration sous critique et être compatibles avec l'interphase ou la matrice lors de l'élaboration ou de l'utilisation.

L'élaboration du composite génère une microstructure très hétérogène. Cette phase d'élaboration inclut une étape de tissage complexe de la préforme fibreuse qui peut être multicouche et multidirectionnelle. Puis le procédé d'infiltration de la matrice céramique induit des porosités résiduelles qui peuvent atteindre 15% du volume du composite. Cette microstructure fait intervenir **plusieurs échelles** : l'échelle du microcomposite constitué d'une fibre et d'une gaine de matrice, l'échelle du fil correspondant à une mèche de plusieurs fibres (minicomposite), puis l'échelle du composite tissé. Les minicomposites qui sont des CMC

unidirectionnels représentatifs du fil, peuvent être testés en traction, ce qui permet d'analyser l'endommagement à cette échelle.

Les mécanismes d'endommagement qui se produisent à l'échelle du fil et à l'échelle du composite tissé se traduisent par des modifications des propriétés mécaniques effectives du CMC. En effet lorsque le composite est chargé mécaniquement, l'apparition des réseaux de fissures à ces deux échelles conditionne le comportement non-linéaire et la durée de vie.

En raison de la diversité de leurs composants élémentaires et de l'architecture du tissage, les familles de composites CMC peuvent être conçues « sur-mesure » en fonction des applications souhaitées. Dans cette perspective il serait avantageux pour le concepteur de matériau composite de connaître les conséquences du choix des constituants élémentaires et de l'architecture sur les propriétés mécaniques effectives du CMC au cours de l'endommagement.

Minicomposites SiC/SiC : Constituants élémentaires et mécanismes de fissuration

Un minicomposite est un composite modèle constitué d'un fil enrobé d'une interface et d'une matrice. Le fil est constitué d'environ 500 fibres longues. Ce fil est semblable aux fils ou torons formant le composite tissé. L'étude de son comportement est une étape essentielle pour l'analyse de la fissuration du CMC. Dans le cadre d'une approche multiéchelle, l'analyse de la fissuration du minicomposite correspond à la description de l'endommagement du CMC à l'échelle microscopique.

Les minicomposites sont constitués d'une mèche de fibres longues densifiée par infiltration CVI (Chemical Vapour Infiltration). Ce sont des composites unidirectionnels. Une coupe perpendiculaire au plan des fibres peut être schématisée par des fibres circulaires entourées d'une interphase et d'une gaine de matrice. Les porosités résultent du procédé d'élaboration du minicomposite.

Propriétés élastiques des constituants élémentaires du minicomposite

La famille de minicomposite étudiée au cours de ces travaux de thèse est caractérisée par :

- des fibres de type Nicalon de rayon d'environ $7\ \mu\text{m}$,
- d'une matrice céramique élaborée par le procédé CVI,
- et d'un matériau d'interphase, le pyrocarbone, déposé par le procédé CVI à la surface des fibres.

On peut supposer que les fibres et la matrice céramique constituant le minicomposite ont un comportement isotrope élastique linéaire. La matrice est plus rigide que les fibres et ces matériaux ont un comportement fragile.

Le module élastique de la matrice céramique élaborée par le procédé CVI est estimé à $E_m = 400\ \text{GPa}$ associé à un coefficient de Poisson $\nu_m = 0,2$.

Pour la fibre céramique Nicalon, le module élastique est estimé à $E_f = 200\ \text{GPa}$ associé à un coefficient de Poisson $\nu_f = 0,12$.

Le matériau d'interphase, intercalé entre la fibre et la matrice, joue un rôle essentiel sur le développement de la fissuration au sein du minicomposite. Son épaisseur, de quelques centaines de nanomètres, est très faible vis-à-vis du diamètre des fibres et de l'épaisseur de la matrice.

Fissuration matricielle et décohésion interfaciale lors de la sollicitation en traction

Lors d'un chargement du minicomposite en traction, on observe l'amorçage des fissures matricielles perpendiculairement aux fibres. Ces fissures matricielles sont déviées à l'interface entre la fibre et la matrice. Les décohésions interfaciales apparaissent simultanément à l'amorçage des fissures matricielles. La longueur de la décohésion créée dépend des caractéristiques du minicomposite et des propriétés des fibres, de la matrice et de l'interphase. La décohésion continue ensuite à se propager, le long de l'interface, avec l'augmentation du chargement de traction.

Comportement non-linéaire résultant de l'endommagement

La courbe de comportement force/déformation obtenue lors d'un essai de traction sur le minicomposite découle du développement de la fissuration ([figure 1](#)). Avant l'amorçage des premières fissures matricielles, le minicomposite se comporte de manière élastique linéaire. La non-linéarité du comportement débute avec l'apparition des premières fissures matricielles.

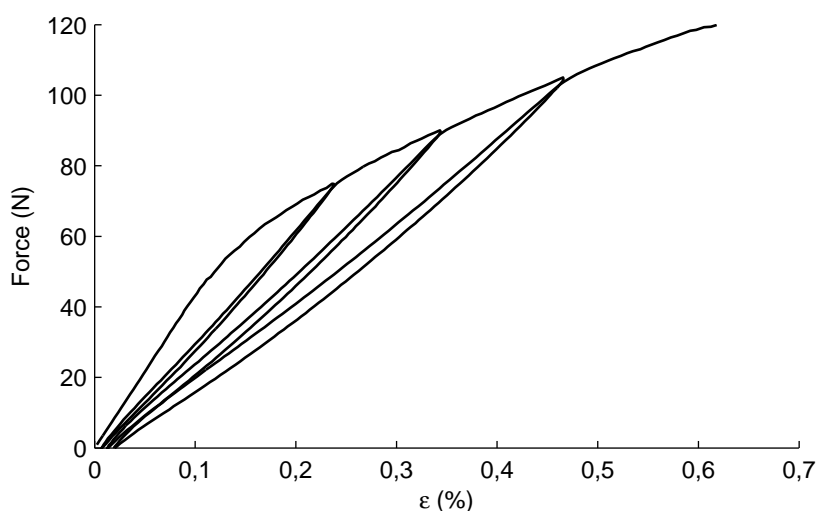


Figure 1 – Réponse en traction du minicomposite lors d'un essai de traction cyclée.

Une fois que le réseau de fissures matricielles est saturé, seules les fibres supportent l'effort de traction. Dans ce cas, le module d'élasticité du minicomposite devient celui des fibres.

Traction cyclée - Boucles d'hystérésis - Déformations résiduelles

Le comportement au cours des cycles de déchargement et de rechargement est marqué par des boucles d'hystérésis ([figure 1](#)). Ces boucles traduisent la présence de décohésions à l'interface entre la fibre et la matrice ainsi que du frottement. L'amplitude des boucles dépend directement des longueurs de décohésion et de l'intensité du frottement interfacial.

L'intensité du frottement dépend notamment de la pression radiale exercée par la matrice sur les fibres. Il faut noter la présence des contraintes résiduelles d'origine thermique résultant de l'élaboration à haute température de ces composites. Le coefficient de dilatation des fibres est inférieur à celui de la matrice. On observe aussi la présence de déformations résiduelles qui apparaissent en fin de déchargement.

Observation in situ du réseau de fissures : Traction sous MEB

Des essais de traction sur minicomposites ont été réalisés sous MEB (Microscope Electronique à Balayage). Des clichés MEB sont enregistrés pour plusieurs paliers de force appliquée. Ces essais ont principalement deux objectifs : la mesure du nombre de fissures matricielles au cours du chargement de traction et la mesure de leur ouverture.

La [figure 2](#) représente les fissures matricielles sur les clichés MEB (Microscope Electronique à Balayage), pour un chargement en force $F = 60\text{ N}$. On observe que les fissures sont créées dans une même section par paquet de fibres. Ces images sont enregistrées pour chaque palier de chargement en force tous les 10 N, à partir de l'observation des toutes premières fissures matricielles ($F = 20\text{ N}$) jusqu'à la rupture du minicomposite ($F = 90\text{ N}$).

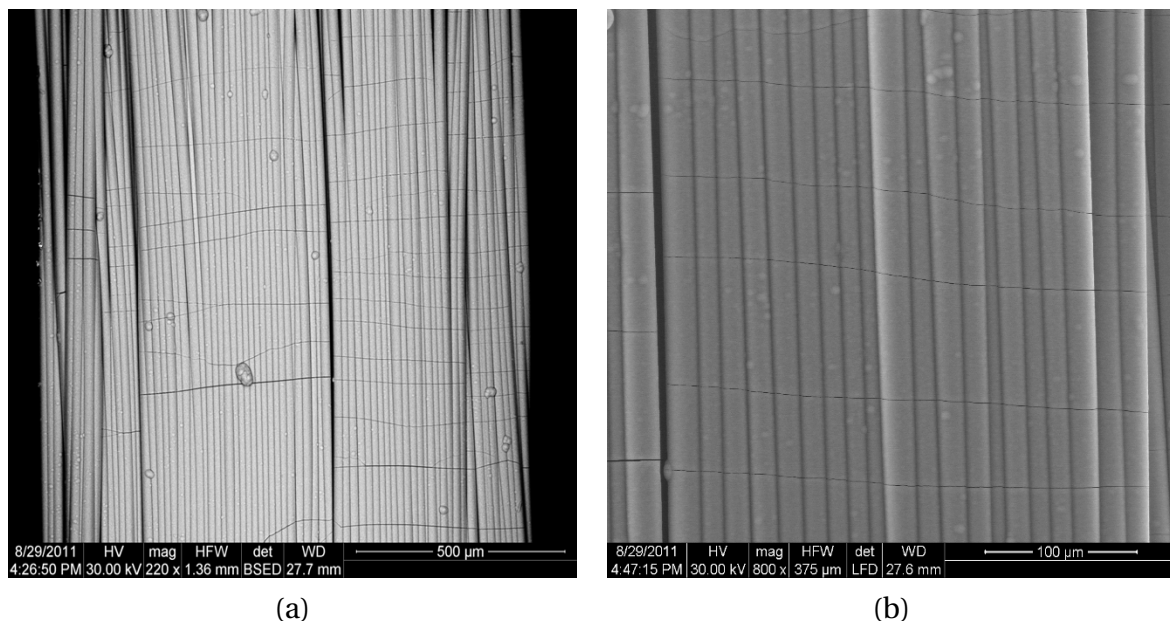


Figure 2 – Clichés MEB d’une partie de la zone d’étude d’un minicomposite utilisée pour les cartographies du minicomposite (a) et zoom sur un groupe de fibres (b). Ces images ont été réalisées pour un palier en force $F = 60\text{ N}$.

Ces clichés MEB permettent de cartographier le minicomposite au cours de la traction et de l’évolution de l’endommagement. Les cartographies sont obtenues en reconstituant l’image entière du minicomposite à partir de l’image de chaque zone. Ensuite un traitement d’image est effectué pour déterminer le nombre de fissures et le pas de fissuration à chaque niveau de la force appliquée. La [figure 3](#) représente la répartition des fissures pour un chargement croissant jusqu’à la rupture ($F = 90\text{ N}$). La cartographie a été obtenue à partir de cinq images MEB correspondant à cinq zones du minicomposite.

Deux étapes sont nécessaires pour déterminer le pas de fissuration à partir des cartographies MEB. D’abord le logiciel ImageJ est utilisé pour relever la position de chacune des fissures, symbolisées par un trait. Les coordonnées des deux extrémités sont relevées. Ensuite un traitement de ces données avec Matlab permet de représenter la répartition des fissures ([figure 3](#)) et de compter le nombre de fissures observées par groupe de fibres, tout le long du minicomposite.

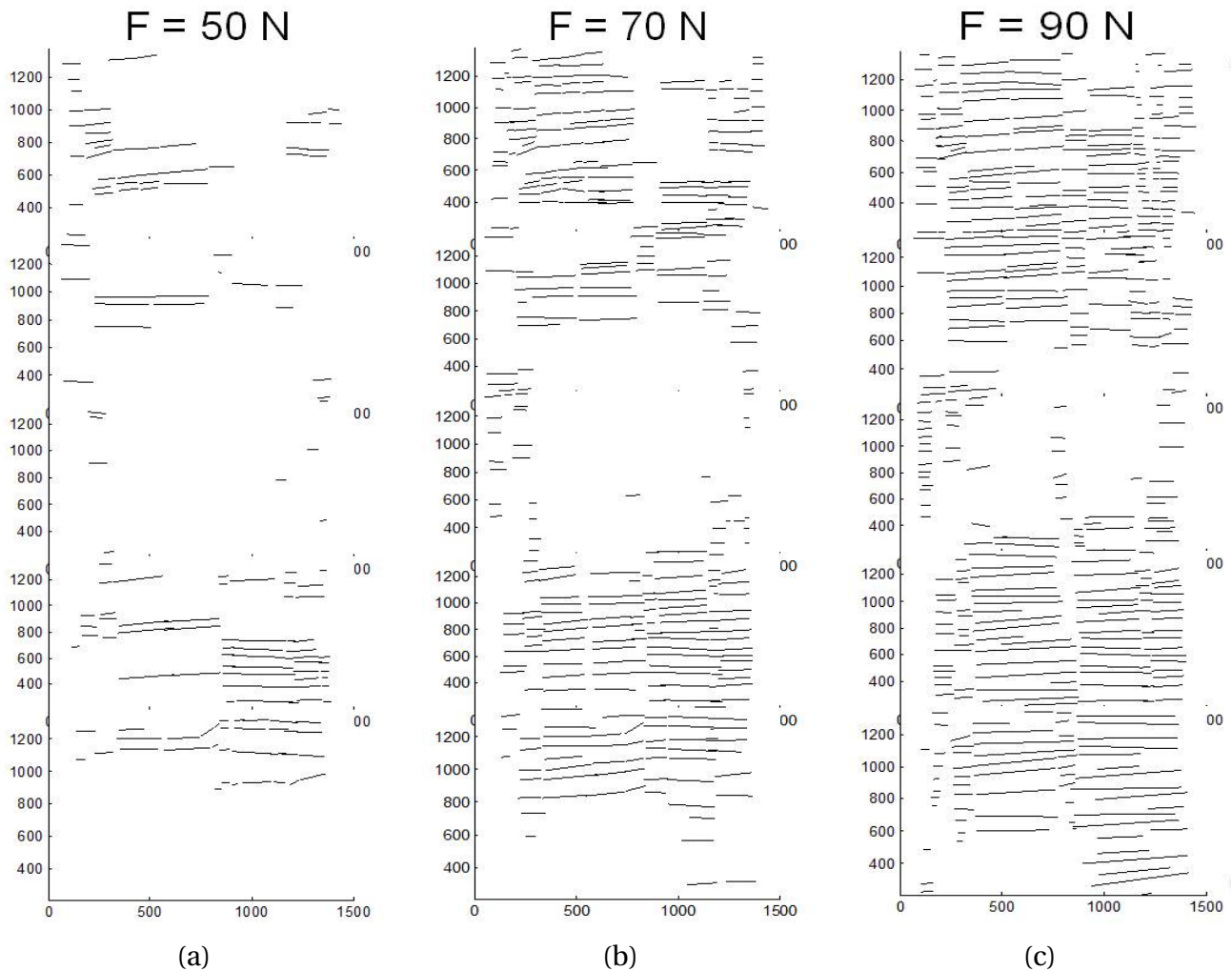


Figure 3 – Répartition des fissures matricielles dans tout le minicomposite pour un chargement croissant jusqu'à la rupture. L'unité du repère est en μm en abscisse et également en ordonnée avec les cinq zones qui reconstitue la longueur utile du minicomposite de 5,2 mm.

La [figure 4a](#) représente les valeurs minimales et maximales des quantités de fissures dénombrées par groupe de fibres, à chaque palier en force.

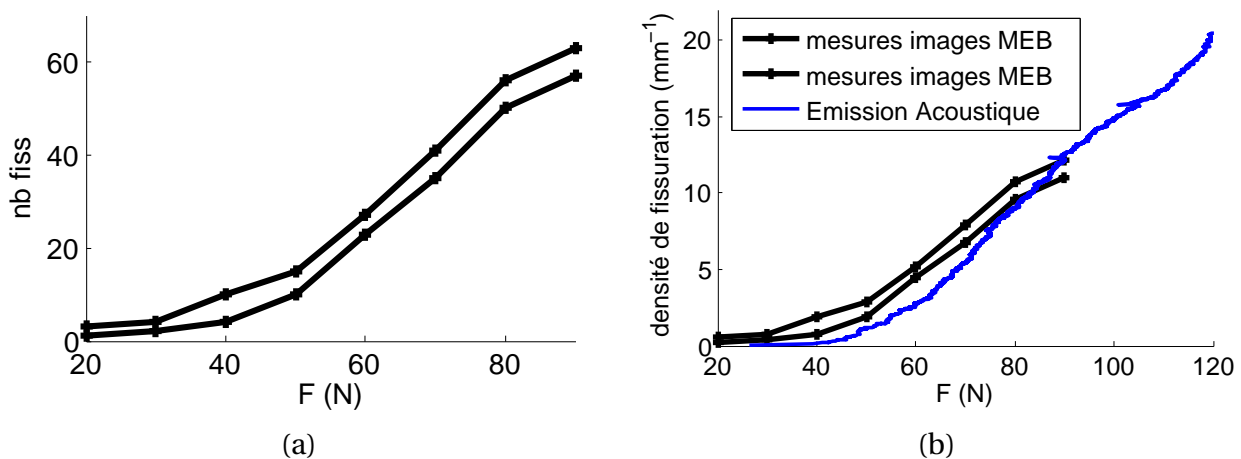


Figure 4 – (a) Valeurs minimales et maximales des fissures dénombrées par groupe de fibres à chaque palier en force. (b) La densité de fissuration (en mm^{-1}) est comparée à la densité de fissuration obtenue en supposant qu'elle est proportionnelle au nombre de coups cumulés des signaux acoustiques.

La densité de fissures matricielles a été déterminée en mesurant le nombre de fissures observées sous MEB sur la longueur de 5,2 mm. La [figure 4b](#) montre l'évolution de la densité de fissure matricielle au cours du chargement de traction, comparée à la densité de fissuration matricielle obtenue en exploitant l'émission acoustique. On a supposé que le nombre de coups cumulés des signaux acoustiques est proportionnel à la densité de fissures matricielles. Les signaux acoustiques enregistrés sont dus aux fissures matricielles, à la propagation de la décohésion, et surtout à la rupture des fibres en fin de chargement.

Mesure des ouvertures de fissures

Les ouvertures de fissures sont mesurées sous MEB directement au cours de la traction, pour chaque palier de chargement. Les fissures étudiées sont repérées et numérotées sur les cartographies. Les ouvertures sont mesurées en utilisant un fort grossissement et l'incertitude de mesure associée est de 20 nm.

Les morphologies des fissures matricielles observées sont illustrées par la [figure 5](#). Les observations MEB permettent de mesurer les ouvertures de fissures matricielles sur la face extérieure de la gaine de matrice entourant les fibres. Une minorité parmi les fissures observées présente une bifurcation dans une autre direction et s'accompagne d'un écaillage du dépôt de matrice ([figure 5 c](#)). L'ouverture de la fissure est dans ce cas augmentée.

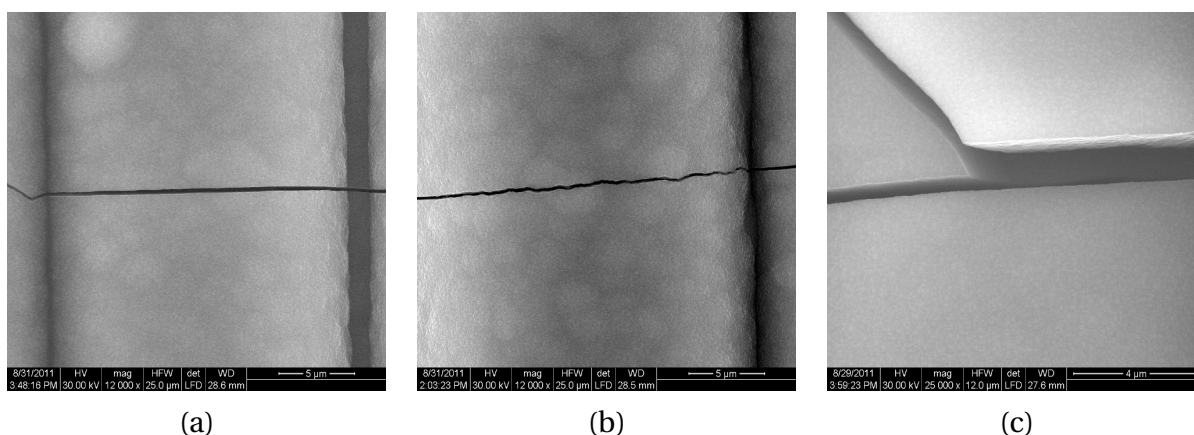


Figure 5 – Morphologie des fissures matricielles observées.

Le nombre de fissures matricielles s'accroît au cours du chargement. Pour augmenter la quantité des mesures d'ouverture de fissures au cours d'un essai (maximiser le nombre de résultats à exploiter sur un essai), des cyclages ont été effectués pour mesurer l'évolution de l'ouvertures des fissures apparues plus tardivement. On souhaite ainsi obtenir les ouvertures de fissures pour des densités de fissuration élevées et des faibles paliers en chargement, afin d'analyser l'ouverture de fissure en fonction de la taille des fragments.

Pour chaque essai, les mesures d'ouvertures de fissures sont réalisées sur une dizaine de fissures en fonction de dix paliers en force, depuis l'apparition des premières fissures, jusqu'à la rupture du minicomposite.

Les résultats des mesures d'ouverture de fissure pour le premier essai sont donnés dans la [figure 6](#). On montre l'évolution des ouvertures de chaque fissure étudiée pour chaque palier de chargement. Chaque fissure est repérée sur les cartographies. Les ouvertures dépendent du chargement et de l'endommagement (qui s'accroît au cours du chargement), ce qui explique

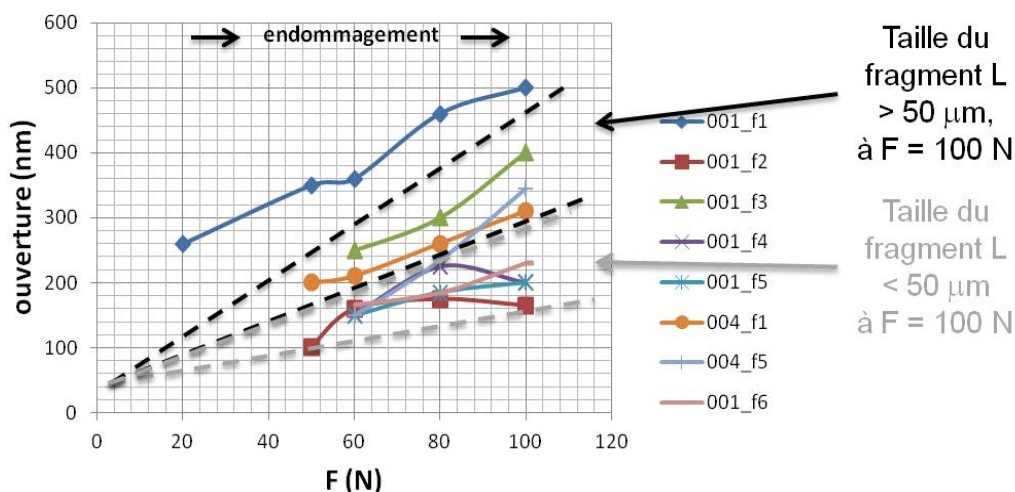


Figure 6 – Mesures des ouvertures de fissures pour chaque palier en force (F (N)).

que les mesures pour une même fissure ne sont pas nécessairement croissantes au cours de la traction.

Les tailles des fragments ont été mesurées pour chaque fissure à partir des cartographies MEB. La figure 6 montre une répartition des fissures suivant deux groupes en fonction de la taille des fragments associés. Les ouvertures de fissures sont plus grandes pour des pas de fissuration (taille de fragment) élevés. La fissure '001-f1' représentée par la courbe bleue est la première fissure observée et la gaine de matrice entourant la fibre au niveau de cette fissure a tendance à s'écailler (illustration de la figure 5c).

La figure 6 représente les mesures des ouvertures de fissures en fonction de la distance inter-fissures mesurée à partir des cartographies MEB, pour plusieurs niveaux de chargement. Les pas de fissuration obtenus pour les fissures étudiées sont compris entre $35 \mu\text{m}$ et $140 \mu\text{m}$. Les ouvertures de fissures semblent suivre une relation linéaire en fonction du pas de fissuration. Deux autres essais ont été réalisés et fournissent des résultats similaires (figure 7 et 8).

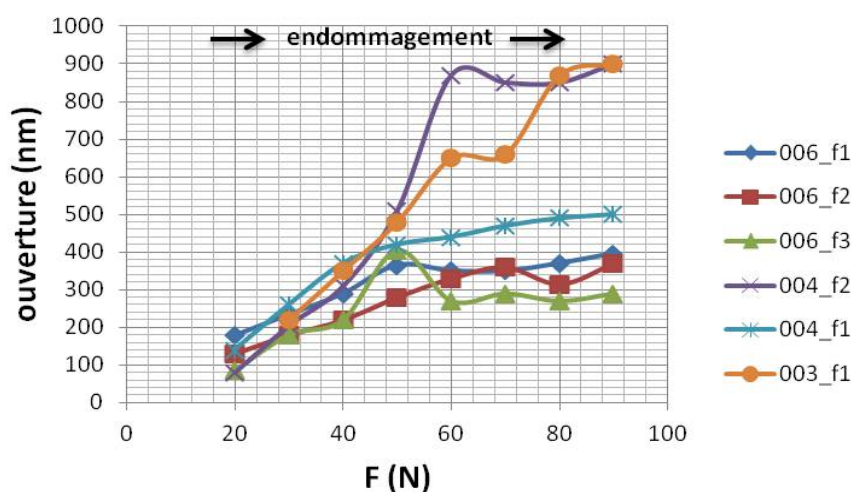


Figure 7 – Mesures des ouvertures de fissures pour chaque palier de force (F) pour l'essai 2.

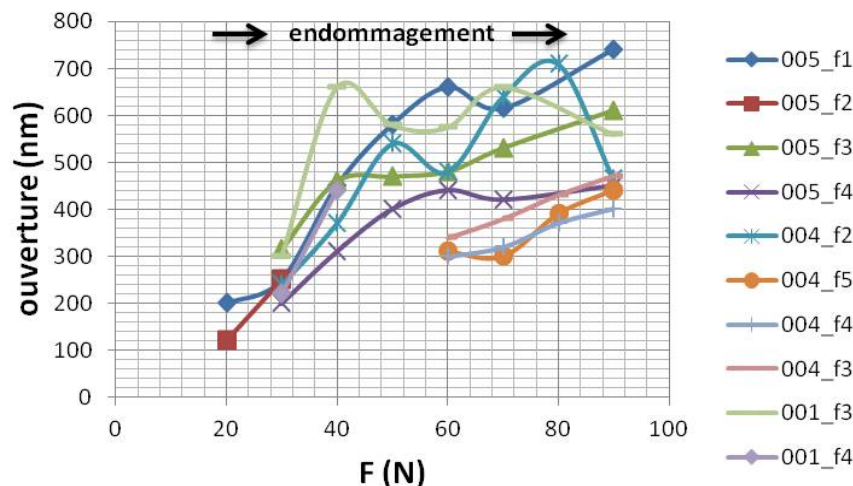


Figure 8 – Mesures des ouvertures de fissures pour chaque palier de force (F) pour l'essai 3.

Objectifs

L'objectif de cette thèse est de **modéliser l'endommagement** des CMC aux échelles du fil et du composite tissé afin de prévoir leur comportement mécanique en traction. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de la thèse de G. Couégnat¹ qui a développé un modèle de comportement des CMC fondé sur une approche multiéchelle.

Cette loi de comportement introduit des variables d'endommagement directement représentatives du réseau de fissures se développant aux échelles du fil et du composite tissé. L'influence de la multifissuration sur les propriétés effectives est déterminée au préalable par des calculs numériques à partir de cellules représentatives de la microstructure du matériau. Néanmoins, les paramètres décrivant l'évolution des variables d'endommagement doivent être estimés à l'aide d'identification à l'échelle macroscopique.

La modélisation de l'endommagement est fondée sur la stratégie suivante :

- Pour le comportement, seuls les mécanismes de fissuration matricielle et de décohésion interfaciale sont pris en compte.
- L'évolution des variables d'endommagement sont reliées aux propriétés à rupture des constituants (matrice et interface) grâce à la modélisation d'une cellule axisymétrique représentative d'un fil idéal.
- Pour cela, on compare tout d'abord une méthode énergétique qui permet une formulation analytique et une méthode utilisant la mécanique de l'endommagement (MZC) qui implique une résolution numérique
- Le critère de rupture est découplé et basé sur la description des ruptures successives des fibres pour un état d'endommagement fixé.
- Le tenseur des rigidités 3D de la structure minicomposite endommagée est obtenu par homogénéisation périodique d'une cellule représentative de la microstructure réelle.
- Une loi de comportement 3D sera utilisée à l'échelle du tissé pour prendre en compte le comportement endommageable du fil.

1. Couégnat G. (2008) Approche multiéchelle du comportement thermomécanique des matériaux composites à renfort tissé. Université Bordeaux 1.

Positionnement du sujet de thèse et démarche proposée

La contribution de ces travaux de thèse consiste à déterminer l'évolution du réseau de fissures au cours d'essais de traction, aux deux échelles citées, en fonction des propriétés à rupture des matériaux élémentaires. Pour mener à bien cet objectif, quatre points sont abordés :

1. Nous avons d'abord **analysé et développé les outils pour simuler les mécanismes de fissuration** matricielle et de décohésion interfaciale aux interfaces entre fibres et matrice à l'échelle du fil ou bien entre fils et matrice, à l'échelle du composite tissé. Il a été nécessaire de sélectionner les modèles permettant de simuler l'évolution du réseau de fissuration au cours d'un essai de traction.

Un modèle numérique fondé sur les zones cohésives a été choisi et développé. L'avantage principal de cet outil numérique est de pouvoir résoudre des problèmes complexes liés à la prise en compte entre autres des contraintes résiduelles et du glissement frottant aux interfaces. Le modèle adopté permet alors de modéliser les mécanismes de fissuration à partir de propriétés intrinsèques (contrainte à rupture, ténacité, coefficient de frottement).

Un effort particulier a été porté à la détermination des propriétés à rupture de la matrice et de l'interface. Ces propriétés ont été identifiées grâce à des essais de traction cyclée sur minicomposites. Les courbes force/déplacement ont été comparées aux simulations de la réponse en traction du fil. Une méthode d'identification est proposée pour déterminer les propriétés à rupture.

2. Le modèle de zones cohésives développé permet de **déterminer l'évolution de la fissuration matricielle et de la décohésion interfaciale** d'une part à l'échelle du fil et d'autre part à l'échelle du composite tissé. On souhaite établir la relation entre les constituants élémentaires (propriétés élastiques, propriétés à rupture) et la progression du réseau de fissures aux deux échelles. La conséquence de l'endommagement sur le comportement du CMC au cours de la traction uniaxiale est aussi modélisée. Différents mécanismes et propriétés sont pris en compte pour simuler l'endommagement tels que les contraintes résiduelles, l'intensité de la liaison interfaciale et le glissement frottant. Des essais de traction simulés aux deux échelles étudiées ont permis de comprendre l'influence de ces différents mécanismes sur la forme non-linéaire de la courbe de réponse en traction.
3. Le caractère multiéchelle du scénario d'endommagement nécessite de faire le lien entre les mécanismes se produisant aux deux échelles. En effet, les mécanismes de fissuration aux échelles micro et méso sont couplés. L'endommagement de la matrice inter-fil (matrice à l'échelle du composite tissé) entraîne localement la reprise des efforts par les fils. Ce mécanisme va à son tour favoriser leur endommagement et provoquer une dégradation des propriétés mécaniques effectives du CMC. A l'échelle du composite tissé, le modèle élément finis (EF) proposé requiert de modéliser le fil ou toron par un matériau homogène ayant un comportement équivalent. On souhaite simuler l'évolution de l'endommagement subi par les fils au sein du composite tissé au cours d'essais de traction. Pour réaliser ce **changement d'échelle**, une **loi de comportement endommageable du fil** a été développée à partir de la connaissance des cinétiques de

fissuration à l'échelle du fil. Les variables d'endommagement sont directement reliées à l'état de fissuration du fil (densité de fissures matricielles, longueurs de décohésion). Cette loi permet la transition de l'échelle du fil vers l'échelle du composite tissé.

4. Le dernier mécanisme de fissuration qui n'a pas encore été pris en compte est la rupture des fibres au sein du fil. La rupture des fibres pilote alors la **rupture du fil** et la durée de vie du composite. Un critère de rupture du fil a été développé à partir d'une procédure de calcul par EF permettant de simuler la rupture successive des fibres au cours de la traction. Le modèle de zones cohésives a été employé. La contrainte à rupture des fibres dépend des paramètres statistiques considérés et la rupture du fil dépend de la distribution des valeurs des contraintes à rupture.

Le modèle complet a été conçu pour faciliter la prise en compte ultérieure des couplages entre les mécanismes de fissuration et les mécanismes physico-chimiques d'oxydation. L'estimation de l'ouverture moyenne des fissures en fonction du chargement appliqué permet d'évaluer la quantité d'oxygène qui diffuse vers l'interphase et les fibres. L'oxydation des interphases et la fissuration sous-critique du renfort diminuent la durée de vie du composite.

Une fois ces quatre points précisés, la démarche proposée pour atteindre l'objectif de modélisation de l'endommagement avec l'approche multiéchelle est illustrée par la [figure 9](#). Ces travaux sont organisés en plusieurs étapes :

1. Analyse des mécanismes de fissuration matricielle et de décohésion interfaciale ainsi que développement des outils de zones cohésives à l'échelle du fil.
2. Détermination des cinétiques de fissuration à l'échelle du fil.
3. Elaboration de la loi de comportement endommageable du fil à partir de la connaissance des cinétiques de fissuration. Un critère de rupture est proposé et ajouté à cette loi de comportement du fil.
4. Modélisation de l'endommagement à l'échelle du composite tissé. Cette étape prend en compte à la fois l'endommagement de la matrice inter-fil (fissuration matricielle, décohésion aux interfaces fils/matrice) et l'endommagement au sein des fils par le biais de la loi de comportement développée précédemment.

Plan du manuscrit

Ce mémoire est présenté en cinq chapitres qui reprennent la démarche proposée. Au cours de cette thèse nous avons considéré la famille des composites SiC/SiC constitués de fibres en carbure de silicium et d'une matrice céramique pour les applications aéronautiques.

Les mécanismes de fissuration matricielle et de décohésion interfaciale sont étudiés au cours de l'endommagement d'une cellule élémentaire d'un minicomposite en traction. Cette analyse fait l'objet du **chapitre 1**. Une approche semi-analytique fondée sur la mécanique de la rupture incrémentale est d'abord proposée pour examiner les deux mécanismes. L'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale sont gouvernés

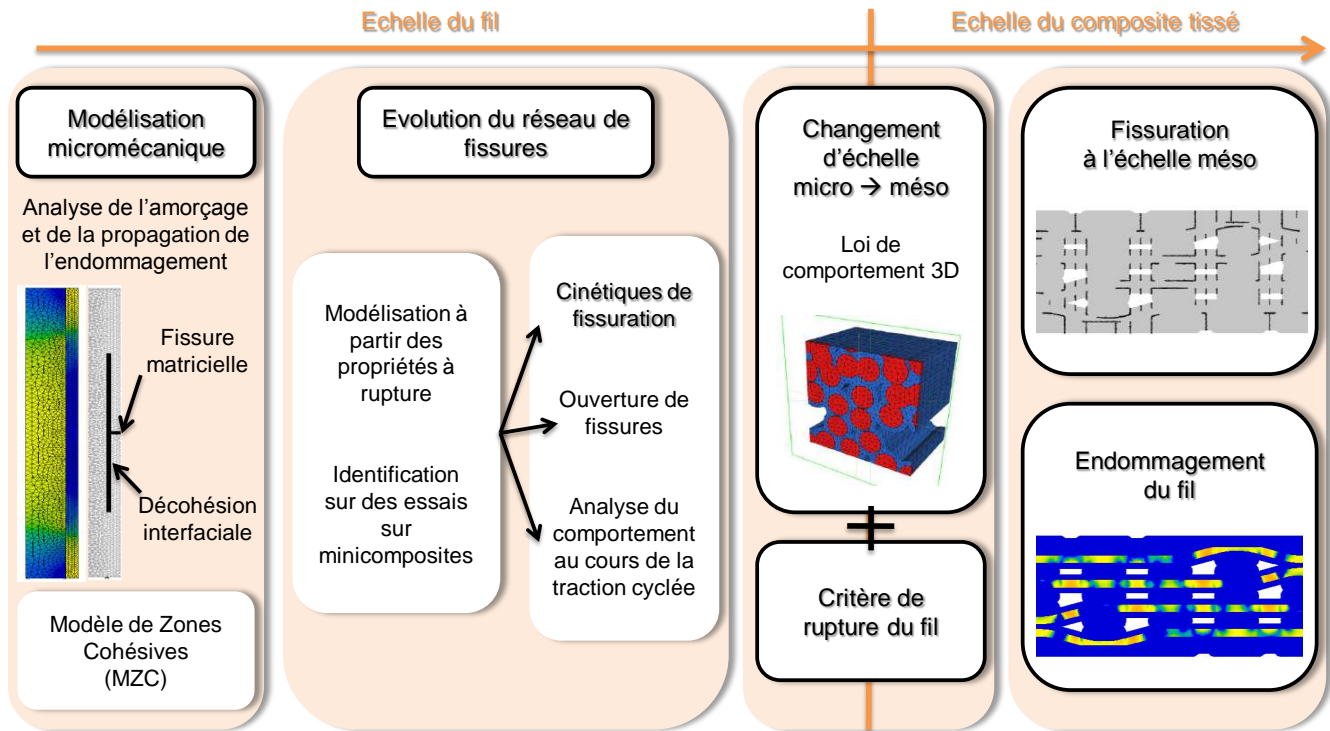


Figure 9 – Approche multiéchelle pour la modélisation de l'endommagement à l'échelle du fil et à l'échelle du composite tissé

par l'énergie de rupture de la matrice et de l'interface. Les contraintes résiduelles issues de la phase d'élaboration qui influent sur l'amorçage de la fissure ainsi que la propagation à l'interface ont été prises en compte par le modèle analytique. Chacun des résultats a été comparé avec le modèle de zones cohésives (MZC) qui a été développé pour simuler les deux mécanismes.

De plus le glissement frottant à l'interface fibre/matrice a aussi été modélisé à l'aide d'une loi de Coulomb (**chapitre 2**). Ces modèles ont permis d'évaluer l'influence des propriétés des constituants fibres et matrice ainsi que de l'interface sur le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle et de la décohésion interfaciale. L'influence de ces propriétés sur les déformations résiduelles et les boucles d'hystérésis au cours de chargements cyclés a également été étudiée.

Pour modéliser la réponse en traction du minicomposite, la multifissuration de la matrice a été simulée à l'aide d'une procédure EF fondée sur les MZC. Cette procédure est détaillée au cours du **chapitre 3**. Ce modèle permet d'évaluer les deux cinétiques d'endommagement considérées : l'évolution de la densité de fissuration et de la longueur de décohésion. Les données d'entrée du modèle sont les propriétés thermomécaniques des fibres et de la matrice, la fraction volumique de fibres, les propriétés à rupture de la matrice et de l'interface et le coefficient de frottement. Les courbes force/déformation de la réponse en traction ainsi que l'évolution de l'endommagement ont été tout d'abord étudiés en fonction des propriétés des constituants du minicomposite. Ensuite une méthode est proposée pour identifier les propriétés à rupture de la matrice et de l'interface ainsi que le coefficient de frottement. Cette méthode utilise les essais de traction expérimentaux. Le but est de déterminer les cinétiques de fissuration du minicomposite en traction en fonction des propriétés à rupture.

Le **chapitre 4** expose la loi de comportement du fil élaborée à partir de la connaissance des cinétiques d'endommagement du fil sollicité dans la direction axiale. Une première partie expose la procédure EF mise en œuvre pour déterminer les propriétés élastiques du fil endommagé. Ces propriétés sont déterminées dans toutes les directions (longitudinale et transversale) et sont ensuite exprimées semi-analytiquement en fonction des deux variables d'endommagement. Enfin les principales relations utilisées pour établir cette loi de comportement sont détaillées. Dans une deuxième partie les ruptures de fibres sont modélisées pour établir un critère de rupture du fil.

Cette loi présente l'avantage d'une loi d'endommagement macroscopique basée sur une modélisation micromécanique : à l'échelle du composite tissé, l'endommagement se développe de manière continue au sein du fil longitudinal et les variables d'endommagement correspondent à l'état de fissuration du fil. Le **chapitre 5** présente enfin la modélisation de l'endommagement de la matrice inter-fil (échelle méso) à l'aide des MZC mise en œuvre sur des maillages représentatifs du CMC à l'échelle du composite tissé sollicité en traction.

Chapitre 1

Modélisation de l'endommagement d'un minicomposite "idéal" : fissuration matricielle et décohésion interfaciale

Sommaire

Introduction	27
I Modélisation de l'amorçage et de la propagation de fissures :	
Eléments de bibliographie	28
I.1 Approches énergétiques	28
Théorie de Griffith : propagation de fissure	28
Extension aux critères d'amorçage	29
I.2 Modèle de Zones Cohésives	30
Modèles existants	30
Utilisation pour la fissuration du minicomposite	30
II Mécanisme de fissuration matricielle	31
II.1 Propriétés mécaniques du minicomposite endommagé	31
Volume élémentaire représentatif du minicomposite	31
Caractéristiques du minicomposite étudié	32
Expression du module longitudinal	32
Contraintes résiduelles axiales	35
Coefficient de dilatation thermique	37
Déformations résiduelles	38
II.2 Emploi d'un modèle de Zones Cohésives (MZC)	39
Description de la loi d'endommagement développée	39
Rigidité initiale des éléments endommageables et contrainte à l'amorçage de la fissure	41
II.3 Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée	43
Réponse en traction au cours de la multifissuration matricielle	43
Propriétés élastiques et déformations résiduelles	43
Refermeture des fissures matricielles en compression	45
Estimation des ouvertures axiales de fissures	46
III Mécanisme de décohésion interfaciale au droit d'une fissure matricielle, sans frottement	47

III.1	Modélisation fondée sur la mécanique de la rupture	47
	Module longitudinal et déformations résiduelles	47
	Analyse énergétique : taux de restitution d'énergie	50
	Critère de propagation de la décohésion	52
III.2	Utilisation d'un Modèle de Zones Cohésives	53
	Description de la loi d'endommagement	53
	Simulation de l'essai de traction	55
	Rigidité initiale et choix des paramètres du modèle	57
	Justification du choix du modèle	58
	Comparaison avec l'approche fondée sur la mécanique de la rupture	59
	Influence de la fraction volumique de fibres et des contraintes résiduelles sur le chargement à l'amorçage de la décohésion	61
III.3	Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée	62
	Propriétés élastiques et déformations résiduelles	62
	Refermeture des fissures matricielles en compression	63
	Estimation des ouvertures de fissures matricielles	63
III.4	Propagation de la décohésion sans frottement : bilan	66
	Conclusion	67
	Bibliographie	71

Introduction

Les modes d'endommagement d'un minicomposite sollicité en traction ont été mis en évidence dans la présentation générale. Il s'agit de la fissuration matricielle accompagnée de la décohésion interfaciale. Le contrôle de la liaison fibre/matrice favorise la déviation des fissures matricielles qui se répartissent régulièrement le long du microcomposite. Le développement de cet endommagement est responsable de la partie non linéaire de la réponse en traction.

La formation d'une fissure dans la couche de matrice provoque une redistribution des contraintes en fonction de la géométrie et des propriétés mécaniques relatives de la matrice, de la fibre et de la région interfaciale. La réponse d'un microcomposite à matrice fragile a été analysée par plusieurs auteurs [Lissart, 1994] [Castelier et al., 2010] à l'aide d'une approche unidimensionnelle en contrainte. Les propriétés interfaciales sont représentées par une contrainte de cisaillement caractéristique τ , qui donne la longueur de décohésion interfaciale d en fonction de la contrainte axiale appliquée.

Nous proposons ici une approche différente fondée sur la mécanique de la rupture. L'interface fibre/matrice est caractérisée par une énergie de rupture G_i^c et un coefficient de frottement μ . La propagation de la décohésion interfaciale est régie par le critère de Griffith qui compare G_i^c et le taux de restitution d'énergie.

Analyse de la fissuration matricielle et de la décohésion interfaciale

On choisit de traiter séparément l'effet du frottement à l'interface fibre/matrice. Ce chapitre est alors consacré à l'analyse des deux mécanismes d'endommagement au sein d'un **minicomposite** sollicité en traction uniaxiale, **sans considérer le glissement frottant**. L'étude du minicomposite en traction avec frottement interfacial fait l'objet du [chapitre 2](#).

La géométrie de ce **composite unidirectionnel** est supposée idéale : l'absence de porosité et la répartition régulière du renfort permet de considérer le microcomposite (fibre entourée d'une gaine de matrice) comme étant le volume élémentaire représentatif. L'étude de la fissuration matricielle puis de la propagation de la décohésion est réalisée successivement.

Approches et outils choisis

Les propriétés élastiques du microcomposite endommagé sont d'abord évaluées puis les contraintes résiduelles résultant de l'élaboration à haute température sont déterminées. Ensuite un premier modèle fondé sur une approche énergétique est proposé. Il permet de calculer la contrainte appliquée à l'amorçage de la fissure matricielle puis à la propagation de la décohésion. La théorie de la **mécanique de la rupture** élastique fragile est utilisée. Ce modèle fournit des expressions analytiques de la contrainte à l'amorçage des deux mécanismes de fissuration étudiés.

D'autre part un **modèle de zones cohésives** (MZC) est développé et mis en œuvre numériquement pour simuler l'évolution de l'endommagement et la réponse en traction. Les deux modèles sont comparés. L'intérêt du MZC est de pouvoir analyser les mécanismes plus difficiles à étudier analytiquement tels que la propagation de la décohésion lors du glissement frottant à l'interface.

De ce modèle de référence, on en déduit un **modèle semi-analytique plus simple**. Les coefficients identifiés permettent d'exprimer l'évolution de la longueur de décohésion en fonction du chargement et du frottement à l'interface. L'ouverture de la fissure matricielle est aussi exprimée.

Enfin les **propriétés élastiques** évaluées sont utilisées pour analyser la réponse en traction, en déterminant le module longitudinal et les déformations résiduelles. Des essais de traction cyclée sont simulés. La prise en compte des contraintes résiduelles et du frottement permet de comprendre leur influence sur l'endommagement et le comportement en traction.

Le frottement à l'interface fait l'objet du [chapitre 2](#). La multifissuration de la matrice est modélisée dans le [chapitre 3](#).

I Modélisation de l'amorçage et de la propagation de fissures : Eléments de bibliographie

L'approche énergétique proposée est fondée sur la mécanique linéaire de la rupture. L'objectif est de prévoir les conditions de propagation des fissures dans les matériaux solides. Cette discipline a connu de nombreux développements théoriques et numériques. Avant de commencer l'analyse de la fissuration matricielle, la théorie de Griffith et ses extensions sont brièvement rappelées. Elle concerne les mécanismes de rupture fragile au sein de matériaux possédant un comportement élastique. Enfin le modèle de zones cohésives a aussi été choisi pour simuler l'endommagement du microcomposite.

I.1 Approches énergétiques

Théorie de Griffith : propagation de fissure

Une fissure est considérée comme une surface de discontinuité du déplacement et des contraintes. La théorie de [Griffith, 1920] permet de décrire l'évolution d'une fissure à l'aide d'un critère de propagation fondé sur la notion de taux de restitution d'énergie. Cette approche globale repose sur le raisonnement de Griffith qui en étudiant les processus de fissuration quasi-statique, note que l'énergie potentielle du système varie avec la surface fissurée. Cette énergie potentielle W_P est la somme de l'énergie interne élastique $W_{\text{élast}}$ et de l'énergie potentielle externe des chargements appliqués W_{ext} .

Le taux de restitution d'énergie s'écrit comme la variation d'énergie potentielle à chargement constant par rapport à la surface fissurée

$$G = -\frac{dW_P}{dS} \quad \text{avec} \quad W_P = W_{\text{élast}} + W_{\text{ext}}, \quad (1.1)$$

où S est l'aire de la surface fissurée. G est le taux d'énergie élastique restitué par la structure lors d'un accroissement de la fissure à chargement fixé. Il s'exprime par une différence d'énergie emmagasinée dans la structure avant et après l'éventuelle propagation d'un incrément infinitésimal de fissure.

G permet d'établir un **critère de propagation de fissure** en le comparant au taux critique de restitution d'énergie G^c tel que

$$G \geq G^c, \quad (1.2)$$

où G^c désigne la ténacité du matériau qui définit sa capacité à résister à la propagation de fissures. Ce critère, fondé sur une approche globale de la structure, s'affranchit de la notion de singularité de contraintes en fond de fissure. Le calcul de la répartition des contraintes en fond de fissure est à la base des approches locales [Irwin, 1957].

On note cependant que la théorie de Griffith suppose la présence de la fissure mais ne permet pas de prévoir sa nucléation ou son amorçage.

Extension aux critères d'amorçage

Pour pouvoir simuler l'amorçage d'une fissure, des critères supplémentaires ont été proposés par [Hashin, 1996] et [Leguillon et al., 2000]. Un accroissement fini Δl de la fissure de longueur initiale l est considéré et le critère différentiel de Griffith est remplacé par une analyse incrémentale. Le bilan d'énergie incrémental $-\Delta W$ s'écrit directement à partir de la différence d'énergie potentielle avant et après la propagation de la fissure, soit $-\Delta W = W_p(l) - W_p(l + \Delta l)$.

L'amorçage de la fissure peut être décrit en considérant la structure initiale saine ($l = 0$). L'amorçage se fait de manière discontinue jusqu'à une longueur $\Delta l > 0$ et la condition d'amorçage devient

$$-\frac{\Delta W}{\Delta S} \geq G^c. \quad (1.3)$$

Cette approche a aussi été utilisée pour simuler l'amorçage de la fissure matricielle au sein du microcomposite (Annexe B).

Parmi les travaux de la littérature on peut aussi mentionner une deuxième approche proposée par [Francfort et Marigo, 1998]. Elle consiste à remplacer le critère $G \geq G^c$ par un principe de minimisation d'énergie de la structure parmi tous les états de fissuration possibles. Ce critère de Griffith "généralisé" permet d'amorcer une ou plusieurs fissures de longueur finie apparaissant à une valeur critique du chargement. Cette approche peut rendre compte d'évolutions spatio-temporelles quelconques de la fissuration (bifurcation, branchement).

Une dernière piste pour pouvoir simuler à la fois l'amorçage et la propagation de la fissuration est d'utiliser les méthodes de la mécanique de l'endommagement. Les lois de comportement traduisent la perte des propriétés élastiques en définissant une variable d'endommagement D . Cette variable interne correspond à l'état d'endommagement : $D = 0$ le matériau est sain, $D = 1$ lorsque le matériau est totalement endommagé.

Cette approche par la mécanique de l'endommagement a été mise en œuvre par le biais d'un modèle de zones cohésives. Les potentielles fissures sont alors modélisées par des éléments endommageables au sein des maillages éléments finis (EF).

I.2 Modèle de Zones Cohésives

Le modèle de zones cohésives (MZC) permet de décrire l'évolution de la fissuration grâce à des critères locaux. La fissuration ou la perte de cohésion de la matière est modélisée par une perte de rigidité brutale de la zone cohésive. La mise en œuvre de ce modèle consiste à définir ces zones cohésives au sein du maillage EF à l'endroit des fissures potentielles. Les éléments endommageables sont insérés dans le maillage et la perte de rigidité est obtenue par une loi de comportement endommageable qui relie la contrainte locale au déplacement relatif des nœuds.

L'amorçage et la propagation de la fissure sont pris en compte et pilotés par un critère en contrainte et un critère en énergie. On note également que l'endommagement de la zone cohésive se produit de manière continue.

Modèles existants

Cette notion de zone cohésive a été introduite initialement par [Dugdale, 1960] et [Barenblatt, 1962] pour modéliser dans un premier temps l'ouverture de la fissure dans une structure bidimensionnelle soumise à un effort de traction/compression. De nombreux travaux, par exemple [Prechtel et al., 2011], [Monerie, 2000] indiquent différents modèles pour divers domaines d'application. Ces modèles permettent maintenant d'envisager des situations mécaniques très complexes (matériaux multiphasés, mixité des modes de sollicitation, fissuration tridimensionnelle, ...). [Monerie, 2000] a développé un MZC adapté à l'interface fibre/matrice des matériaux composites. Le comportement visqueux de l'interface a été également considéré.

Utilisation pour la fissuration du minicomposite

Dans le cadre de cette étude, seul un développement de la fissuration quasi-statique est analysé en excluant la possible viscosité de l'interface. On notera que des précautions sont nécessaires pour se prémunir des effets de dépendance au maillage lors de l'emploi des MZC [Turon et al., 2007] [Tomar et al., 2004].

Le MZC permet de prendre en compte les conditions de contact entre les deux surfaces fissurées lors de la phase de propagation. Certains développements permettent également de prendre en compte le frottement [Alfano et Sacco, 2006][Chaboche et al., 1997]. Cette possibilité est une alternative intéressante car il est difficile d'estimer un taux de restitution d'énergie en présence de frottement [Sun et Quian, 1998].

L'analyse des mécanismes de fissuration au cours d'un essai de traction débute avec l'étude de l'amorçage de la fissure matricielle.

II Mécanisme de fissuration matricielle

II.1 Propriétés mécaniques du minicomposite endommagé

On souhaite d'abord modéliser les propriétés élastiques du minicomposite comportant des fissures matricielles. Une analyse par Eléments Finis (EF) est proposée puis des expressions analytiques du **module** sont déduites.

Les modèles EF et analytique sont fondés sur une **représentation idéale de la géométrie du minicomposite**.

Volume élémentaire représentatif du minicomposite

On suppose que le minicomposite ne contient aucune porosité et que les fibres sont réparties régulièrement. L'analyse du minicomposite revient alors à considérer un volume élémentaire constitué d'une fibre entourée d'une gaine de matrice ([figure 1.1](#)).

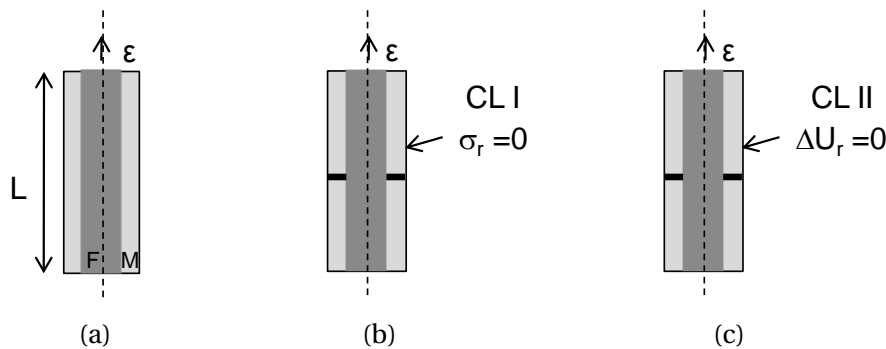


Figure 1.1 – (a) Cellule élémentaire de longueur L soumise à une déformation axiale appliquée ε . (b) et (c) Fissure matricielle annulaire de la cellule élémentaire qui peut être soumise à deux types de conditions aux limites (CL).

Une fissure matricielle est créée au centre de la cellule élémentaire et deux types de conditions aux limites (CL) sont identifiés :

1. La cellule élémentaire est **libre sur sa surface extérieure dans la direction radiale**, ce qui équivaut à une contrainte radiale nulle $\sigma_r = 0$ ([figure 1.1b](#)). Ce premier type de conditions aux limites (CL I) permet de modéliser un **microcomposite**.
2. Pour que la cellule élémentaire soit représentative du **minicomposite** en traction, il est nécessaire que le **déplacement radial sur la surface extérieure** de la cellule élémentaire soit **uniforme** ([figure 1.1c](#)). Dans ce cas, cette condition supplémentaire (CL II) impose que le déplacement radial sur la surface extérieure de la matrice ne varie pas quelle que soit la distance par rapport à la fissure matricielle $\Delta U_r = 0$.

Au cours de ce chapitre, **les expressions des propriétés élastiques du minicomposite endommagé sont identiques pour les deux types de conditions aux limites. Seuls les coefficients employés dépendent des CL. Dès lors, pour la suite du chapitre, les résultats sont présentés arbitrairement en considérant les conditions aux limites CL I, destinées au microcomposite.** Sauf indication contraire, les coefficients seront exprimés et évalués pour ce type de conditions aux limites. Etant constituée d'une seule fibre, **la cellule élémentaire représentative du minicomposite ou du microcomposite sera appelée "microcomposite"** sans distinction.

Caractéristiques du minicomposite étudié

La cellule élémentaire considérée (figure 1.1a) est constituée d'une fibre (rayon R_f , module E_f , coefficient de Poisson ν_f et coefficient de dilatation thermique axial α_z^f et radial α_r^f), entourée d'une gaine de matrice (rayon extérieur R_m , module E_m , coefficient de Poisson ν_m et coefficient de dilatation thermique axial α_z^m et radial α_r^m).

La fraction volumique de fibre V_f s'exprime par $V_f = \frac{R_f^2}{R_m^2}$.

Sauf indication contraire, les caractéristiques de la cellule élémentaire sont celles définies dans le tableau 1.1.

V_f	0,5	E_m	400 GPa	ν_m	0,2	α_z^m	$4,6.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	α_r^m	$4,6.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
R_f	$7 \mu\text{m}$	E_f	200 GPa	ν_f	0,2	α_z^f	$2,9.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	α_r^f	$2,9.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Tableau 1.1 – Caractéristiques de la cellule élémentaire

Les résultats vont confirmer que la **différence entre les coefficients de Poisson de la fibre et la matrice** a une influence négligeable sur le module élastique et les contraintes résiduelles axiales. Cette différence entre les coefficients de Poisson n'aura qu'un effet très faible sur la contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle et sur le début de la propagation de la décohésion. On s'attend en revanche à ce que cette différence ait une influence sur la propagation de la décohésion interfaciale.

On choisira donc dans un premier temps des coefficients de Poisson identiques $\nu_f = \nu_m = 0,2$ pour établir les expressions relatives au minicomposite endommagé. L'influence de la différence des coefficients de Poisson sur la propagation de la décohésion sera étudiée ultérieurement.

Les **contraintes résiduelles** résultent de l'élaboration du minicomposite à haute température et de la différence des coefficients de dilatation de la fibre et de la matrice. Ces contraintes peuvent avoir des conséquences importantes sur la contrainte à l'amorçage de l'endommagement et lors de la propagation des fissures. Elles seront donc étudiées tout au long de ce chapitre. Les contraintes résiduelles axiales modifient en particulier le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle et les contraintes radiales influencent la propagation de la décohésion. La dilatation thermique de la fibre et de la matrice SiC peut être orthotrope et des coefficients de dilatation différents dans la direction axiale et radiale peuvent être considérés [Villeneuve, 1991].

Expression du module longitudinal

Le module longitudinal E_0 du microcomposite non endommagé est donné par la loi des mélanges avec

$$E_0 = E_f V_f + (1 - V_f) E_m \quad \text{si} \quad \nu_f = \nu_m. \quad (1.4)$$

On note que si les coefficients de Poisson sont différents, l'expression (E-5) donnée en Annexe E fournit la valeur du module longitudinal. Lorsque $\nu_f \neq \nu_m$, l'influence sur le module longitudinal est tout à fait négligeable (d'au plus 0,5 %).

On souhaite exprimer le module élastique longitudinal $E(L)$ du microcomposite présentant une fissure annulaire au centre de la cellule de taille L (figure 1.1b). Par symétrie, cette cellule représente un microcomposite dont les fissures sont réparties périodiquement avec un pas de fissuration de longueur L . Une cellule 2D axisymétrique est utilisée (figure 1.2a). **Les conditions aux limites représentées correspondent aux CL I. Pour modéliser le deuxième type de conditions aux limites, il suffit d'imposer une condition supplémentaire de bord droit dans la direction radiale sur la surface extérieure de la matrice.**

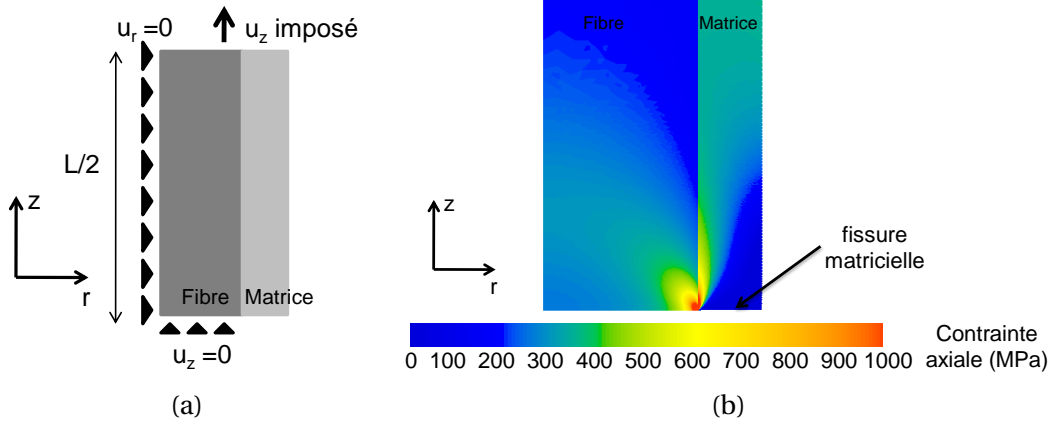


Figure 1.2 – (a) Cellule 2D axisymétrique représentative du microcomposite endommagé en traction, avec un pas de fissuration L . Le déplacement u_z dans la direction axiale est imposé sur l'extrémité supérieure. (b) Répartition de la contrainte axiale au voisinage de la fissure matricielle. Une déformation axiale est appliquée sur le microcomposite $\varepsilon = 0,1\%$.

L'analyse EF fournit la répartition des contraintes au voisinage de la fissure matricielle (figure 1.2b). Une étude a permis de montrer que le champ de contrainte axial σ_z^m et σ_z^f dans la fibre et dans la matrice redevient homogène dès que la distance axiale à la fissure matricielle dépasse $3R_f$. Dans ces conditions, les contraintes axiales dans la matrice et dans la fibre s'expriment en fonction de la contrainte σ appliquée sur le microcomposite par $\sigma_z^m = \frac{E_m}{E_0} \sigma$ et $\sigma_z^f = \frac{E_f}{E_0} \sigma$.

Les maillages réalisés à partir des cellules élémentaires sont paramétrables en fonction du pas de fissuration L . Les éléments utilisés sont des triangles linéaires à trois nœuds et le maillage est raffiné au voisinage de la pointe de fissure matricielle (figure 1.3). Trois domaines sont distingués avec une taille de maillage spécifique pour pouvoir garantir la convergence du module longitudinal.

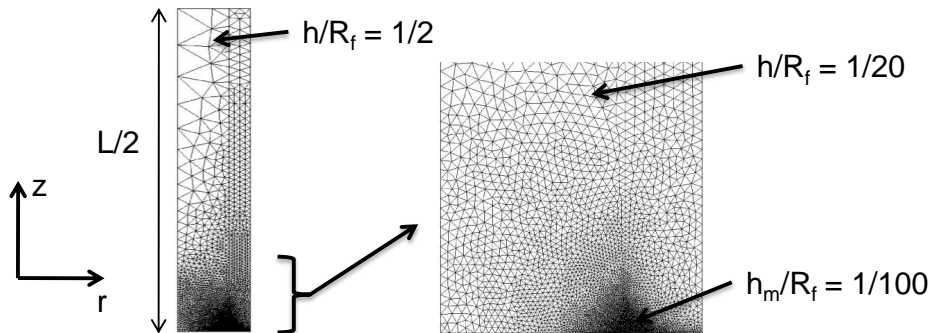


Figure 1.3 – Maillage EF utilisé pour déterminer le module longitudinal $E(L)$. La taille h des éléments du maillage est choisie telle que $h/R_f = 1/2$ loin de la fissure matricielle et $h/R_f = 1/20$ dans un voisinage autour d'un rayon de fibre R_f de la fissure matricielle. En pointe de fissure matricielle, $h_m/R_f = 1/100$.

Le module longitudinal $E(L)$ est évalué par EF (figure 1.4). D'après les travaux de [Hutchinson et Jensen, 1990] déjà présentés chapitre 1-II, le module élastique $E(L)$ s'écrit en fonction du pas de fissuration périodique L selon

$$E(L) = \frac{E_0}{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}}, \quad (1.5)$$

où le **coefficient sans dimension** $D_1^0(V_f, E_f/E_m)$ dépend des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice ainsi que de la fraction volumique de fibre. Ce coefficient traduit la redistribution des contraintes résultant de la présence de la fissure matricielle. D'après [Hutchinson et Jensen, 1990], le coefficient D_1^0 est indépendant du pas de fissuration si les fissures matricielles sont suffisamment espacées avec $L > 3R_f$. Cette condition est vérifiée car les analyses micrographiques montrent que le pas de fissuration matricielle n'est jamais inférieur à $30 \mu m$ pour un minicomposite SiC/SiC (figure 3 p.17).

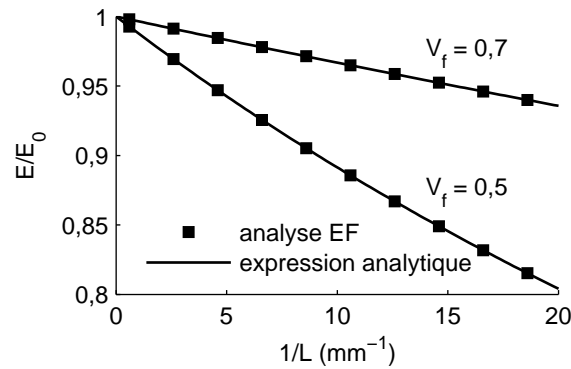


Figure 1.4 – Module longitudinal $E(L)$ en fonction de la densité de fissuration matricielle $1/L$ obtenue par calculs EF et par l'expression analytique (eq. 1.5), pour deux valeurs de la fraction volumique de fibres V_f . Les valeurs sont normalisées par le module longitudinal E_0 du microcomposite sain.

Le module longitudinal puis le **coefficient** D_1^0 ont été déterminés pour les deux types de conditions aux limites (figure 1.5). Nous avons noté un gain de rigidité de presque 10 % avec les CL II. On observe surtout que le coefficient D_1^0 dépend de V_f et du contraste fibre/matrice E_f/E_m . Ces résultats sont obtenus en choisissant des coefficients de Poisson identiques $\nu_f = \nu_m = 0,2$. La valeur de D_1^0 obtenue à partir de $\nu_f = 0,12$ et $\nu_m = 0,2$ est 5 % plus élevée que la valeur précédente.

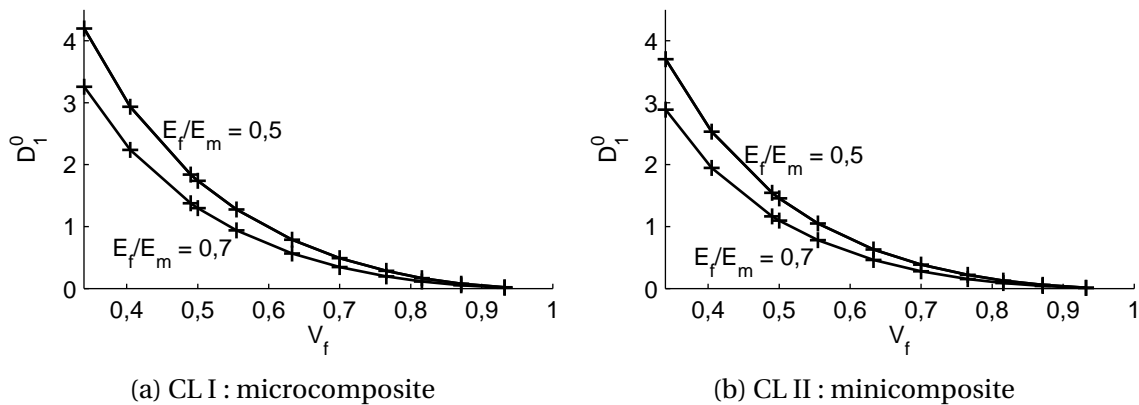


Figure 1.5 – Calculs numériques du coefficient D_1^0 en fonction de la fraction volumique de fibre V_f , du contraste fibre/matrice et pour les deux types de conditions aux limites (CL).

Contraintes résiduelles axiales

Les contraintes résiduelles sont issues lors du refroidissement après la phase d'élaboration à haute température, en raison de la différence entre les coefficients de dilatation thermique des constituants fibre et matrice. Ces contraintes résiduelles sont à l'origine non seulement de la mise en compression radiale de la matrice, mais influencent aussi le chargement axial à l'amorçage de la fissure. La différence des coefficients de dilatation thermique dans la direction axiale est notée $\Delta\alpha_z$ en fonction des **coefficients de dilatation axiale de la fibre et de la matrice** α_z^f et α_z^m tels que

$$\Delta\alpha_z = \alpha_z^f - \alpha_z^m. \quad (1.6)$$

Le signe de $\Delta\alpha_z$ contrôle le signe des contraintes résiduelles axiales qui vont favoriser ou non l'amorçage de la fissure matricielle. Lorsque $\Delta\alpha_z < 0$, les contraintes résiduelles introduisent donc un état de traction axiale dans la matrice. Les contraintes résiduelles dépendent aussi de la variation de température après élaboration ΔT , qui s'exprime en fonction de la température d'élaboration et de la température d'utilisation tel que

$$\Delta T = T_{\text{élaboration}} - T_{\text{chargement}}. \quad (1.7)$$

Etant donné que la température d'élaboration est d'environ 1000 °C et que le composite est étudié à température ambiante, **on considère dans toute la suite du travail que la variation de température vaut $\Delta T = -1000$ °C.**

Calcul des contraintes résiduelles

[Lu et Hutchinson, 1995] ont étudié les contraintes résiduelles et ont exprimé les coefficients de dilatation du microcomposite endommagé en fonction du pas de fissuration matricielle L . Les **contraintes résiduelles axiales** sont exprimées par

$$\begin{cases} \sigma_z^{m,th} = \frac{a_2 E_m \Delta\alpha_z \Delta T V_f}{1 - V_f} & \text{dans la matrice} \\ \sigma_z^{f,th} = -a_2 E_m \Delta\alpha_z \Delta T & \text{dans la fibre} \end{cases}. \quad (1.8)$$

Le **coefficient** a_2 dépend de la fraction volumique de fibre V_f et des propriétés élastiques des constituants fibre et matrice. Avec $\nu_f = \nu_m = \nu$, le coefficient a_2 s'écrit

$$a_2 = \frac{(1 - V_f) E_f}{(1 + \nu)(E_f + (1 - 2\nu)E_0)} \left(2\nu\lambda + 1 - \nu + (1 + \nu) \frac{E_f}{E_0} \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\alpha_r^f - \alpha_r^m}{\alpha_z^f - \alpha_z^m}. \quad (1.9)$$

Les expressions analytiques (1.8) des contraintes résiduelles ont été comparées aux valeurs résultant des analyses EF et sont identiques (figure 1.6). Les coefficients de dilatation dans la direction radiale $\alpha_r^m = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ et $\alpha_r^f = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ (tableau 1.1) et la différence des coefficients de dilatation dans la direction axiale $\Delta\alpha_z$ a été étudiée.

Lorsque les coefficients de dilatation dans la direction axiale sont identiques $\alpha_z^f = \alpha_z^m$, alors $\Delta\alpha_z = 0$. On peut s'intéresser à la valeur des contraintes résiduelles axiales si $\Delta\alpha_z = 0$ avec dans la direction radiale $\alpha_r^f \neq \alpha_r^m$. Dans ce cas le coefficient a_2 tend vers ∞ (relation 1.9). On observe que les contraintes résiduelles axiales obtenues avec l'équation 1.8 et calculées par EF sont non nulles (figure 1.6a).

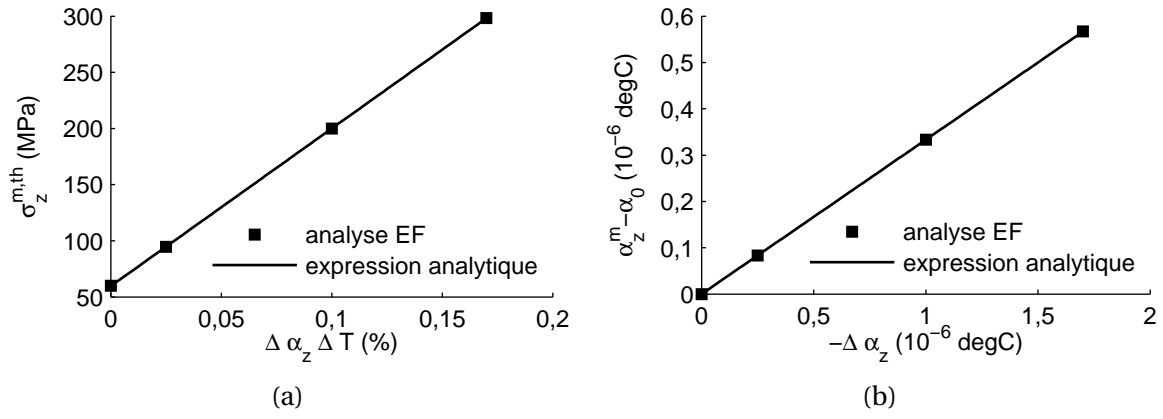


Figure 1.6 – (a) Contraintes résiduelles axiales $\sigma_z^{m,th}$ supportées par la matrice en fonction de la déformation $\Delta \alpha_z \Delta T$ avec $\Delta \alpha_z = \alpha_z^f - \alpha_z^m$. (b) Coefficient de dilatation α_0 du microcomposite sain.

Contraintes axiales supportées par la fibre et la matrice

Les **contraintes axiales σ_z^f et σ_z^m supportées par la fibre et la matrice** dans la partie saine du microcomposite (figure 1.2b), se déterminent à partir de la contrainte appliquée σ par

$$\sigma_z^f = \frac{E_f}{E_0} \sigma + \sigma_z^{f,th} \quad \text{et} \quad \sigma_z^m = \frac{E_m}{E_0} \sigma + \sigma_z^{m,th} \quad \text{si} \quad \nu_f = \nu_m. \quad (1.10)$$

Dans le cas général, [Hutchinson et Jensen, 1990] proposent d'écrire les contraintes axiales σ_z^f et σ_z^m en utilisant le **coefficient a_1** avec

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^f &= a_1 \sigma + \sigma_z^{f,th} \quad \text{et} \quad \sigma_z^m = \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sigma + \sigma_z^{m,th} \\ \text{avec} \quad a_1 &= \frac{E_f}{E_0} \quad \text{si} \quad \nu_f = \nu_m \quad \text{et} \quad a_1 \approx \frac{E_f}{E_0} \quad \text{si} \quad \nu_f \neq \nu_m \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

On note que le coefficient de Poisson $\nu_f \neq \nu_m$ a une influence négligeable sur le coefficient a_1 (Annexe E).

Contraintes résiduelles et refermeture de la fissure matricielle

Lorsque $\Delta \alpha_z < 0$, les contraintes résiduelles introduisent un état de traction axiale dans la matrice. Les fissures matricielles sont ouvertes même si aucun chargement n'est appliqué. La fissure matricielle est refermée lorsque la matrice n'est plus contrainte dans la direction axiale, soit lorsque $\sigma_z^m = 0$. Une **compression axiale** du minicomposite permet d'observer la **refermeture de la fissure**. Cette contrainte de compression est notée σ^T telle que $\sigma^T > 0$. On peut la déterminer en utilisant l'expression (1.11) de la contrainte dans la matrice avec $\sigma_z^m = 0$, une contrainte appliquée $\sigma = -\sigma^T$ et la contrainte résiduelle $\sigma_z^{m,th}$ (1.8), ce qui donne

$$\sigma^T = E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T \quad \text{avec} \quad \Delta \alpha_z^T = \Delta \alpha_z \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0}. \quad (1.12)$$

Le terme $\Delta \alpha_z^T$ a été défini pour simplifier l'écriture. Les coefficients a_1 (1.11) et a_2 (1.9) ont déjà été introduits à partir des caractéristiques du minicomposite. On précise que la répartition des contraintes dans le minicomposite sain ne dépend pas du type de conditions aux limites. Dès lors il en va de même pour les coefficients a_1 et a_2 . La contrainte σ^T est indépendante de l'endommagement.

La connaissance de la contrainte axiale supportée par la matrice est nécessaire pour l'analyse de la fissuration matricielle et il est préférable de l'exprimer directement à partir de la contrainte σ^T . Les contraintes résiduelles $\sigma_z^{f,th}$ et $\sigma_z^{m,th}$ (1.8) peuvent être réécrites en fonction de σ^T (1.12) ce qui donne

$$\sigma_z^f = a_1 \sigma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^T \quad \text{et} \quad \sigma_z^m = \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} (\sigma + \sigma^T). \quad (1.13)$$

Coefficient de dilatation thermique

Microcomposite sain

Le coefficient de dilatation axial du **microcomposite sain** α_0 est exprimé simplement si les coefficients de Poisson sont identiques $\nu_f = \nu_m = \nu$ avec

$$\alpha_0 = \alpha_z^m + \frac{V_f E_f}{E_0} \Delta \alpha_z. \quad (1.14)$$

La figure 1.6b montre que cette expression est en accord avec les valeurs de α_0 calculées par EF. Lorsque $\nu_f \neq \nu_m$ il faut exprimer le coefficient de dilatation sous sa forme générale (relation E-6, Annexe E). Si l'influence de la différence de coefficient de Poisson sur le module élastique E_0 est négligeable, les calculs réalisés montrent que la valeur du coefficient de dilatation α_0 est plus élevée d'au plus 2 % dans le cas où $\nu_f = 0,12$ et $\nu_m = 0,2$.

Coefficient de dilatation du microcomposite endommagé

[Lu et Hutchinson, 1995] proposent une expression du coefficient de dilatation axial du microcomposite endommagé en fonction du pas L de fissuration matricielle

$$\alpha(L) = \alpha_0 + \Delta \alpha_z^T D_1^0 \frac{R_f}{L} \quad \text{avec} \quad \Delta \alpha_z^T = \Delta \alpha_z \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0}. \quad (1.15)$$

Le coefficient D_1^0 a déjà été calculé précédemment (figure 1.5) et dépend de la fraction volumique de fibre V_f et du contraste fibre/matrice E_f/E_m . Les valeurs de $\alpha(L)$ avec la densité de fissuration $1/L$ fournies par la relation (1.15) sont bien identiques à celles déterminées par analyse EF (figure 1.7).

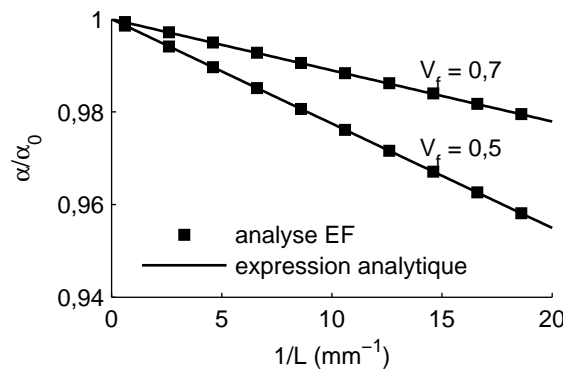


Figure 1.7 – Coefficient de dilatation α du microcomposite en fonction de la densité de fissures matricielle $1/L$ pour deux valeurs de la fraction volumique de fibres V_f , obtenu avec l'expression analytique 1.15 et par analyse EF. Le coefficient de dilatation du microcomposite sain est α_0 .

Les contraintes résiduelles sont aussi à l'origine des déformations résiduelles observées lors des chargements cyclés. Si $\Delta \alpha_z < 0$, les fissures matricielles restent ouvertes même si aucun effort n'est appliqué sur le microcomposite. Un raisonnement permet d'exprimer ces déformations résiduelles.

Déformations résiduelles

Le microcomposite est soumis à la fois au chargement de traction mais aussi à la variation de température après élaboration ΔT . Sous l'effet du chargement thermique, le microcomposite subit une déformation axiale $\varepsilon_{th} = \alpha(L)\Delta T$ (figure 1.8b). Le chargement mécanique imposé est noté $\varepsilon_{méca}$ (figure 1.8c). Le chargement total au cours des calculs EF s'écrit alors

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{méca} + \alpha(L)\Delta T \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E(L)}. \quad (1.16)$$

La déformation élastique $\varepsilon_{méca}$ s'exprime directement à partir de la contrainte axiale appliquée σ et du module élastique $E(L)$.

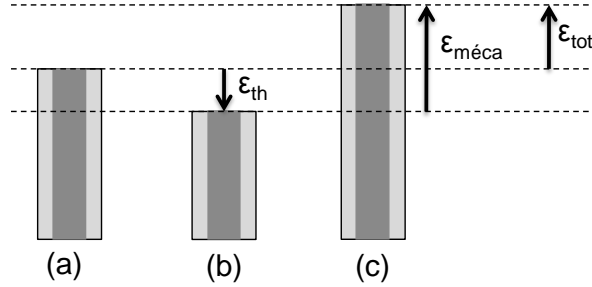


Figure 1.8 – Déformation axiale de la cellule élémentaire du microcomposite endommagé soumis à la fois au chargement mécanique et thermique. (b) La variation de température après élaboration ΔT engendre une dilatation thermique ε_{th} . (c) La déformation totale ε_{tot} imposée à la cellule est la somme de la dilatation thermique ε_{th} et du chargement mécanique $\varepsilon_{méca}$.

En considérant le microcomposite sain, la déformation appliquée au cours du chargement de traction peut être déduite de la déformation totale par

$$\varepsilon = \varepsilon_{tot} - \alpha_0 \Delta T. \quad (1.17)$$

Au cours de l'endommagement, la déformation appliquée ε peut être exprimée en utilisant la relation qui relie la déformation totale ε_{tot} (1.16) et (1.17), ce qui donne

$$\varepsilon = -(\alpha_0 - \alpha(L)) \Delta T + \varepsilon_{méca}. \quad (1.18)$$

La déformation appliquée ε est la somme de la déformation élastique $\varepsilon_{méca}$ et de la déformation résiduelle. **Cette déformation résiduelle, notée $\varepsilon_r(L)$, peut alors s'exprimer comme une différence entre les coefficients de dilatation par**

$$\varepsilon_r(L) = -(\alpha_0 - \alpha(L)) \Delta T \quad \text{soit} \quad \varepsilon_r(L) = \Delta \alpha_z^T \Delta T D_1^0 \frac{R_f}{L}. \quad (1.19)$$

Cette expression sera comparée par la suite aux déformations résiduelles obtenues à l'aide du modèle numérique.

Pour simuler l'amorçage de la fissure matricielle et modéliser la réponse en traction du microcomposite, un Modèle de Zone Cohésives (MZC) a été utilisé. Ce modèle est à présent détaillé dans le cas simple où seule une fissure matricielle est prise en compte. Il sera réutilisé par la suite pour modéliser simultanément la fissuration de la matrice et la décohésion interfaciale.

Les expressions du module longitudinal et des déformations résiduelles vont pouvoir être comparées aux essais de traction monotone, traction cyclée et traction compression obtenues avec le MZC.

II.2 Emploi d'un modèle de Zones Cohésives (MZC)

Un modèle de zones cohésives permet de simuler numériquement l'amorçage et la propagation de fissures dont la trajectoire est connue. Ce modèle est fondé sur l'endommagement des éléments d'interface qui modélisent les fissures. Celles-ci sont représentées par les éléments d'interface sans épaisseur ayant leur propre loi de comportement endommageable. L'implémentation de ce modèle nécessite deux étapes qui consistent à :

1. définir les éléments d'interface dans le maillage EF
(insertion des éléments endommageables sans épaisseur)
2. définir la loi de comportement endommageable de ces éléments d'interface.

Les éléments endommageables sont tout d'abord insérés dans les cellules 2D axisymétriques représentatives du microcomposite. La taille des éléments du maillage h_{mMZC} au voisinage des MZC insérés pour simuler la fissure matricielle est paramétrable (figure 1.9). Les caractéristiques du microcomposite sont toujours celles données dans le tableau 1.1.

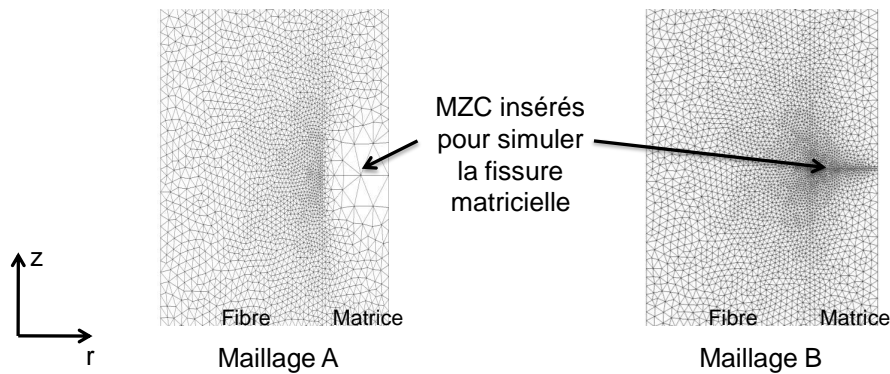


Figure 1.9 – Maillages 2D axisymétriques représentatifs du microcomposite avec insertion des MZC au milieu de la cellule pour simuler la création de la fissure matricielle. Les maillages sont paramétrables en fonction de la taille des éléments h_{mMZC} au niveau des MZC pour simuler la fissure matricielle. Les deux maillages A et B présentés ont été réalisés avec une taille des éléments de la matrice h_m telle que $h_m/R_f = 1/20$. Pour le maillage A : $h_{mMZC}/R_f = 1/5$ et pour le maillage B : $h_{mMZC}/R_f = 1/100$.

Description de la loi d'endommagement développée

La loi cohésive est appliquée aux éléments d'interface sans épaisseur dont les nœuds sont initialement superposés. Elle est régie par les équations qui relient les déplacements relatifs aux efforts locaux et prend la forme d'une loi de comportement endommageable $\sigma = f(\epsilon)$.

On suppose que la création de la fissure matricielle dépend uniquement de la sollicitation dans la direction axiale. La loi cohésive proposée est bilinéaire. Elle est analogue à la loi proposée par [Alfano et Crisfield, 2001] mais ne considère que la relation entre l'effort normal T_n et la différence des déplacements normaux U_n (figure 1.10). Les trois paramètres σ_{max} , U_{0n} et δ_n sont nécessaires pour la définir.

La rigidité de l'élément d'interface décroît lorsque la contrainte atteint la contrainte maximale σ_{max} . Le déplacement U_{0n} influe sur la rigidité initiale des éléments d'interface. Puis la contrainte normale décroît en fonction du déplacement relatif jusqu'à $U_n = \delta_n$, δ_n étant le saut de déplacement normal à rupture de l'élément d'interface. Cette loi cohésive a été choisie pour simuler la fissuration matricielle parce qu'il est possible de paramétrer la rigidité initiale en sélectionnant la valeur du paramètre U_{0n} indépendamment de σ_{max} et de δ_n .

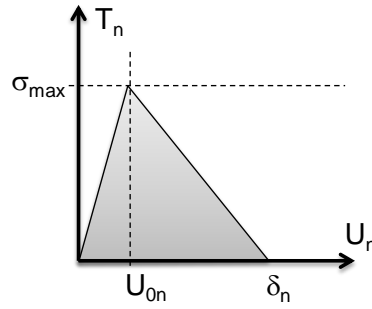


Figure 1.10 – Modèle de zones cohésives utilisé pour simuler la fissuration matricielle. L'effort normal T_n est exprimé en fonction de la différence des déplacements normaux U_n des nœuds des éléments d'interface. Cette loi dépend des trois paramètres σ_{max} , U_{0n} et δ_n .

L'endommagement au sein des éléments d'interface est décrit par la variable λ en fonction du déplacement relatif normal U_n des nœuds de l'interface telle que

$$\lambda = \left| \frac{U_n}{\delta_n} \right|. \quad (1.20)$$

Cette variable d'endommagement λ varie de façon continue de $\lambda = 0$ (élément d'interface sain) à $\lambda = 1$ (rupture complète de l'élément d'interface). On note λ_{max} la valeur maximale de l'endommagement λ atteint au cours du calcul. La diminution de la rigidité est obtenue lorsque $\lambda > \lambda_r$ avec $\lambda_r = \frac{U_{0n}}{\delta_n}$.

La contrainte normale au sein de ces éléments s'exprime en fonction de U_n et de la fonction $f(\lambda)$ telle que

$$T_n = f(\lambda_{max}) \frac{U_n}{\delta_n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f(\lambda) = \frac{\sigma_{max}}{\lambda_r} & \text{si } \lambda \leq \lambda_r \text{ et } \lambda_r = \frac{U_{0n}}{\delta_n} \\ f(\lambda) = \frac{\sigma_{max}}{(1 - \lambda_r)} \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.21)$$

Un critère en contrainte est utilisé pour simuler l'amorçage de la fissure. Dès que la contrainte de la matrice atteint la valeur σ_{max} , la rigidité de l'élément endommageable diminue. L'**amorçage** de la fissure est piloté par la **contrainte maximale** σ_{max} . La **propagation** de la fissure est gouvernée par l'**énergie de rupture de la matrice** G_m^c . L'énergie de rupture est donnée par l'aire sous la courbe de la relation qui décrit la contrainte normale T_n en fonction du déplacement U_n , soit

$$G_m^c = \int_0^{\delta_n} T_n du_n \quad \text{donc} \quad \boxed{G_m^c = \frac{1}{2} \sigma_{max} \delta_n}. \quad (1.22)$$

Le modèle de zones cohésives permet de simuler l'évolution de l'endommagement à partir des deux critères (σ_{max} , G_m^c). Le saut de déplacement δ_n est défini par la relation $\delta_n = \frac{2G_m^c}{\sigma_{max}}$.

Il est également nécessaire que la **rigidité initiale des éléments endommageables** ne soit pas trop faible sous peine de créer un assouplissement avant même l'amorçage de la fissure. Cela entraîne aussi un amorçage de fissure pour une force appliquée plus faible. A l'opposé, une rigidité initiale trop élevée va engendrer des difficultés de convergence. Cette rigidité initiale s'exprime par $K_{mMZC} = \frac{\sigma_{max}}{U_{0n}}$ et dépend du paramètre U_{0n} . L'influence du maillage sur la création de la fissure est aussi étudiée.

Rigidité initiale des éléments endommageables et contrainte à l'amorçage de la fissure

Pour étudier l'influence de la rigidité initiale des éléments d'interface, la contrainte appliquée sur le microcomposite à l'amorçage de la fissure matricielle a été calculée numériquement à l'aide du modèle de zones cohésives développé (figure 1.11). Trois séries de paramètres (σ_{max}, G_m^c) sont considérées :

1. $\sigma_{max} = 400 \text{ MPa}$ et $G_m^c = 1 \text{ J.m}^{-2}$ (soit $\delta_n = 5.10^{-3} \mu\text{m}$).
2. $\sigma_{max} = 800 \text{ MPa}$ et $G_m^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$ (soit $\delta_n = 5.10^{-3} \mu\text{m}$).
3. $\sigma_{max} = 800 \text{ MPa}$ et $G_m^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ (soit $\delta_n = 1.10^{-2} \mu\text{m}$).

L'énergie de rupture de la matrice G_m^c a été choisie suffisamment faible afin de simuler la propagation instantanée de la fissure matricielle. La contrainte à l'amorçage a été obtenue en imposant un déplacement croissant avec un pas de chargement très faible pour pouvoir identifier correctement l'amorçage. De plus, les contraintes résiduelles n'ont pas été prises en compte.

Il est possible de prévoir la contrainte d'amorçage de la fissure matricielle σ^c à partir de σ_{max} en utilisant la relation (1.13). Lorsque la contrainte σ_z^m supportée par la matrice atteint la contrainte critique σ_{max} , la fissure matricielle est amorcée pour une contrainte appliquée

$$\sigma^c = \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} \sigma_{max} , \quad (1.23)$$

puisque les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte. Compte tenu des caractéristiques du microcomposite (tableau 1.1), la fissure matricielle va s'amorcer pour une contrainte appliquée $\sigma^c = 300 \text{ MPa}$ (série 1) et $\sigma^c = 600 \text{ MPa}$ (série 2 et 3). Ces valeurs de la contrainte à l'amorçage sont effectivement obtenues avec le modèle de zones cohésives et les paramètres choisis lorsque la rigidité des éléments d'interface est suffisamment élevée (figure 1.11a).

Pour obtenir moins de 1 % d'erreur sur la contrainte à l'amorçage σ^c , il est nécessaire que la rigidité initiale K_{mMZC} respecte la condition $K_{mMZC} \frac{R_f}{E_f} \geq 20$ (figure 1.11a).

D'autre part, la taille des éléments du maillage h_{mMZC} au voisinage de la fissure matricielle doit respecter la condition $h_{mMZC}/R_f \leq 1/10$ pour simuler convenablement l'amorçage de la fissure matricielle avec une énergie de rupture faible (figure 1.11b). Ceci est vrai dans le cas traité dans ce chapitre où les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte.

Prise en compte des contraintes résiduelles

Avec les contraintes résiduelles, la **contrainte σ^c à l'amorçage de la fissure matricielle** se déduit de la relation (1.13) à partir de la contrainte dans la matrice σ_{max} avec

$$\sigma^c = \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} \sigma_{max} - \sigma^T , \quad (1.24)$$

où le coefficient a_1 dépend des caractéristiques du minicomposite (1.11) et la contrainte σ^T (1.12) s'écrit à partir des contraintes résiduelles.

On a observé que l'introduction des contraintes résiduelles demande de raffiner le maillage au niveau des éléments endommageables pour pouvoir utiliser une rigidité initiale K_{mMZC} suffisamment élevée. Le tableau 1.2 montre qu'il est nécessaire que la taille du maillage h_{mMZC} au niveau de la fissure matricielle soit au plus $h_{mMZC}/R_f = 1/20$.

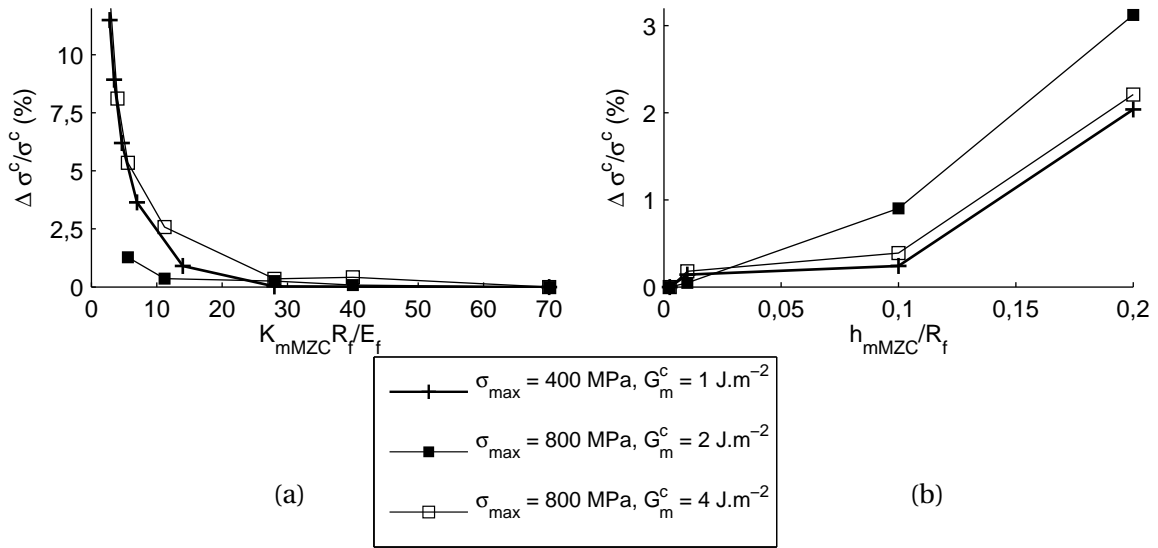


Figure 1.11 – Ecart relatif de la contrainte σ^c à l'amorçage de la fissure en fonction de (a) la rigidité initiale K_{mMZC} des éléments endommageables et (b) de la taille des éléments h_{mMZC} au voisinage des MZC pour simuler la fissure. La figure (a) a été obtenue à partir d'un maillage tel que $h_{mMZC}/R_f = 1/10$. Pour la figure (b) la rigidité initiale est donnée par $K_{mMZC}R_f/E_f = 20$. Le pas de fissuration L utilisé pour ces calculs est $L = 100 \mu m$ et les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte.

Dans le cas d'une simulation coûteuse en temps de calcul, il est utile de savoir dans quelle mesure il est possible de réduire le nombre d'éléments et d'en connaître les conséquences sur l'exactitude des contraintes à l'amorçage σ^c .

h_{mMZC}/R_f	Temps CPU	$\Delta\sigma^c/\sigma^c$
1/10	Pas de convergence	
1/20	≈ 1 min	7 %
1/100	≈ 2 min	5 %
1/400	≈ 6 min	3 %

Tableau 1.2 – Influence de la taille des éléments du maillage h_{mMZC} sur la simulation par EF de l'essai de traction au cours de l'amorçage de la fissure matricielle dans la cellule de longueur $L_0 = 100 \mu m$ et sur la contrainte σ^c à l'amorçage des fissures. La rigidité initiale K_{mMZC} des éléments endommageables est choisie telle que $K_{mMZC}R_f/E_f = 20$.

En résumé, le modèle de zones cohésives permet de simuler l'amorçage et la propagation de la fissure à partir des deux critères σ_{max} et G_m^c . Les paramètres U_{0n} et δ_n sont calculés par les deux conditions

$$\delta_n = \frac{2G_m^c}{\sigma_{max}} \quad \text{et} \quad U_{0n} \leq \frac{1}{20} \frac{\sigma_{max}}{E_f} R_f. \quad (1.25)$$

Dans toute la suite les calculs EF seront réalisés à partir d'un maillage paramétré par $h_{mMZC}/R_f = 1/100$.

L'amorçage de la fissure matricielle a également été analysé par une approche énergétique fondée sur la mécanique de la rupture incrémentale. Le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle est exprimé en fonction de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c . Cette étude est présentée en [Annexe B](#) et une comparaison avec le MZC est proposée.

II.3 Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée

On propose de simuler la réponse en traction pendant l'amorçage successif de plusieurs fissures matricielles. Ainsi les propriétés mécaniques du microcomposite endommagé, obtenues analytiquement ou avec le MZC pourront être comparées en fonction du nombre de fissures.

Réponse en traction au cours de la multifissuration matricielle

On considère un microcomposite de taille $L_0 = 400 \mu m$, la cellule élémentaire a été maillée et huit fissures potentielles ont été introduites périodiquement à l'aide des MZC. En vue de simuler la fissuration successive de la matrice, une contrainte maximale σ_{max} croissante a été attribuée à chacun des huit MZC (figure 1.12b). L'énergie de rupture $G_m^c = 3 J.m^{-2}$ a été choisie suffisamment faible pour que les fissures se propagent instantanément dans toute la section de matrice dès l'amorçage. Un chargement de traction en déplacement est appliqué sur la cellule au cours duquel les huit fissures sont créées successivement. Cela entraîne une chute de contrainte au moment de l'amorçage et une perte de rigidité (figure 1.12a).

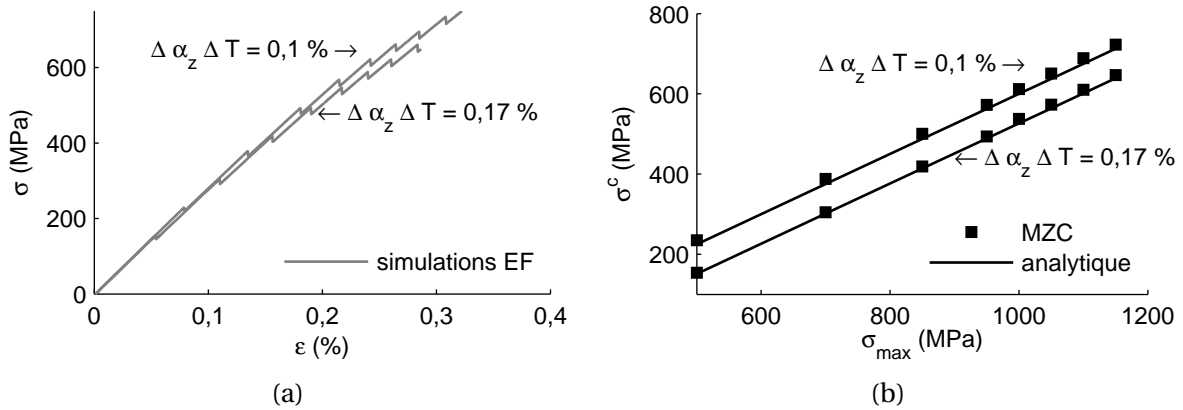


Figure 1.12 – (a) Courbe contrainte/déformation simulée au cours de la fissuration du microcomposite en traction en utilisant le modèle de zones cohésives. La longueur de la cellule est $L_0 = 400 \mu m$. Huit fissures sont créées dans la matrice dont l'amorçage est gouverné par la contrainte σ_{max} attribuée aux zones cohésives. (b) Contrainte σ^c à l'amorçage des fissures matricielles obtenue au cours des simulations par le MZC en fonction de σ_{max} . Ces valeurs sont comparées à l'expression théorique (1.24). Les contraintes résiduelles axiales sont paramétrées par la déformation $\Delta \alpha_z \Delta T$.

Les **contraintes résiduelles** sont induites au cours du calcul EF par la **variation de température ΔT** (1.7) et la **différence des coefficients de dilatation** (caractéristiques de la cellule élémentaire tableau 1.1). En particulier, la différence des coefficients de dilatation dans la direction axiale est notée $\Delta \alpha_z$ (1.6). La figure 1.12 confirme que les contraintes résiduelles axiales favorisent l'amorçage de la fissure matricielle si $\Delta \alpha_z < 0$. Ceci résulte de la mise sous tension axiale de la matrice. On précise que la **déformation appliquée sur le microcomposite ϵ** se déduit de la déformation totale ϵ_{tot} déterminée par le calcul EF ainsi que de la dilatation axiale du microcomposite sain selon la relation 1.17.

Propriétés élastiques et déformations résiduelles

A l'aide du MZC, il est aussi possible de simuler des cycles déchargement puis recharge-ment au cours de l'endommagement du microcomposite (figure 1.13). Un cycle a été modélisé

après chaque amorçage de fissure. On observe que le comportement au cours du déchargement/rechargement est linéaire. En utilisant le comportement au cours des cycles, on peut déterminer le module longitudinal et les déformations résiduelles du microcomposite.

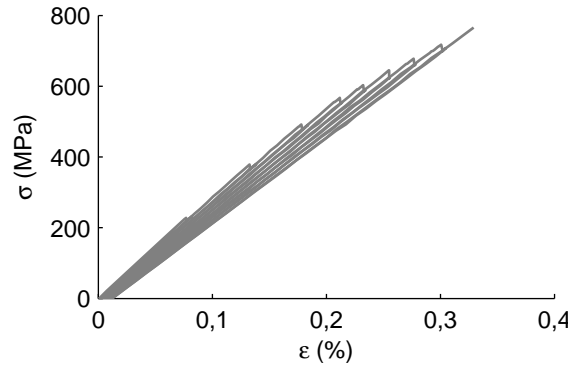


Figure 1.13 – Courbe contrainte/déformation simulée au cours de la fissuration du microcomposite pendant l'essai de traction cyclée. Les contraintes résiduelles axiales sont définies par $\Delta\alpha_z\Delta T = 0,1\%$. En tout huit cycles sont réalisés après les huit amorçages de fissures.

La densité moyenne de fissures ρ s'exprime en fonction du nombre de fissures n créées par

$$\rho = \frac{n}{L_0} . \quad (1.26)$$

Une étude préalable a montré que la répartition des fissures matricielles dans la cellule ne modifie pas la valeur du module à condition que les fissures soient espacées de plus de $3R_f$ ce qui est notre cas. Le module longitudinal décrit en fonction de la densité moyenne ρ correspond alors à $E(L)$ où L représente le pas de fissuration moyen tel que $\rho = 1/L$.

Le module longitudinal et les déformations résiduelles ont été déterminés à partir de chaque boucle en fonction de $1/L$ (figure 1.14). La **comparaison de $E(L)$ obtenu à partir de l'expression (1.5)** avec les modules calculés à chaque boucle confirme cette corrélation.

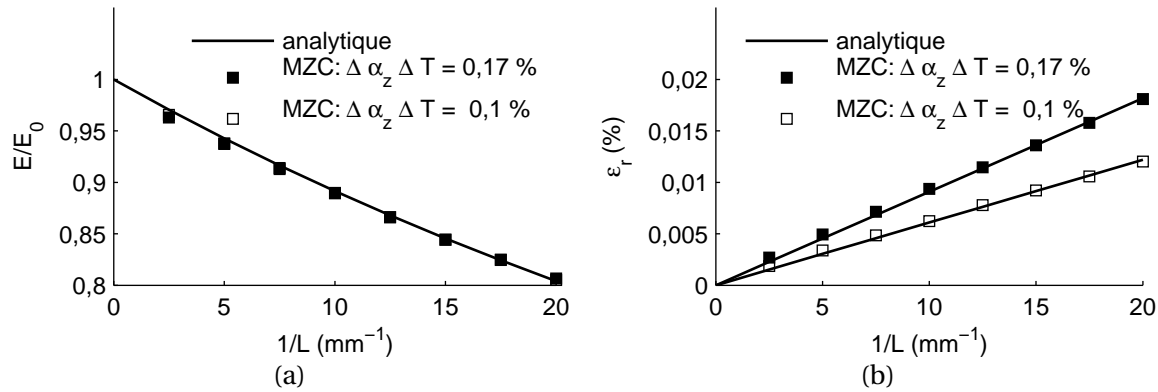


Figure 1.14 – Module élastique (a) et déformations résiduelles (b) évaluées à partir des essais de traction cyclés en fonction de la densité de fissuration $1/L$. Ces valeurs sont comparées aux expressions analytiques du module longitudinal (équation 1.5) et des déformations résiduelles (équation 1.19).

Les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L)$ ont aussi été déterminées à partir des cycles simulés après chaque amorçage de fissure (figure 1.14b). **L'expression (1.19) des déformations résiduelles écrites à partir des coefficients de dilatation correspond bien aux valeurs obtenues avec le MZC.** $\varepsilon_r(L)$ est linéaire en fonction de la densité de fissuration $1/L$.

Par la suite, si une compression axiale est appliquée sur la cellule du microcomposite endommagé, la refermeture des fissures est simulée. Des essais cyclés de traction/compression ont été réalisés pour observer ces refermetures de fissures.

Refermeture des fissures matricielles en compression

Le chargement en compression au cours des cycles est suffisamment élevé pour pouvoir observer la refermeture des fissures matricielles (figure 1.15). Avant leur refermeture, le comportement linéaire au cours du déchargement a permis de déterminer le module élastique $E(L)$ du microcomposite endommagé. Après la refermeture des fissures en compression, le microcomposite se rigidifie pour retrouver le module du microcomposite sain E_0 .

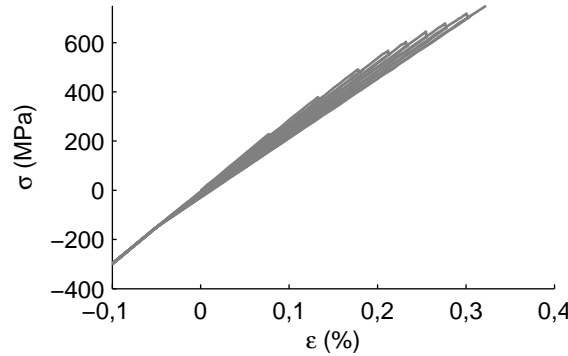


Figure 1.15 – Simulation d'un essai cyclé de traction/compression. Les contraintes résiduelles sont prises en compte avec $\Delta\alpha_z\Delta T = 0,1 \%$.

Le module tangent au cours des cycles de déchargement permet d'observer à nouveau la perte de rigidité du microcomposite endommagé pour chaque cycle (figure 1.16). La modélisation de l'essai de traction cyclée a montré que le comportement au cours du déchargement est linéaire avant la refermeture de la fissure matricielle. On devrait alors observer un module tangent $E_{tangent}$ constant égal à $E(L)$. Une fois la fissure matricielle refermée, le comportement est également linéaire et le microcomposite retrouve son module initial soit $E_{tangent} = E_0$. Ce saut de rigidité au moment de la refermeture de la fissure donne lieu à une **discontinuité** du module tangent qui devrait être constant par morceaux (figure 1.16).

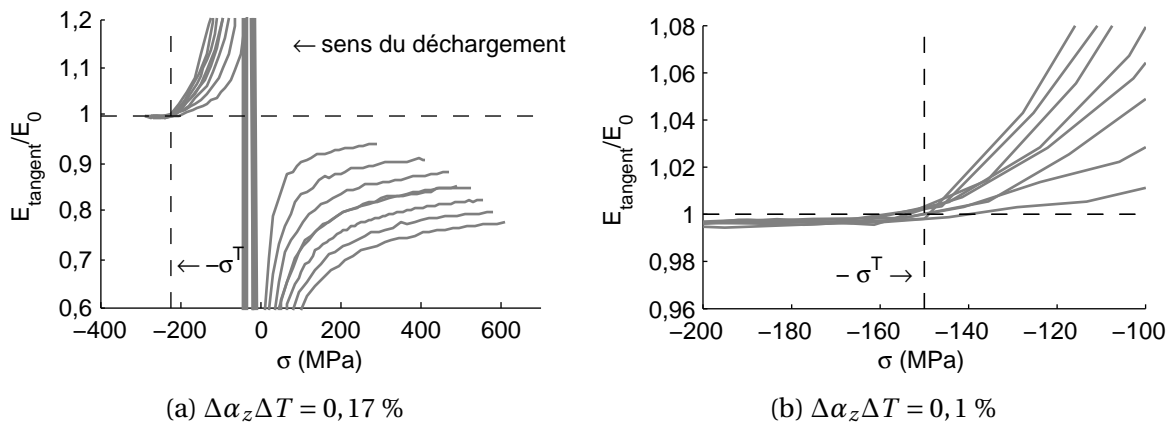


Figure 1.16 – Module tangent $E_{tangent}$ au cours du déchargement déterminé à partir des cycles réalisés après chaque amorçage de fissure. Lorsque la contrainte appliquée σ atteint $-\sigma^T$ les fissures sont refermées et le module retrouve la valeur du module E_0 du microcomposite sain. L'influence des contraintes résiduelles a été étudiée en fonction de la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$.

La contrainte appliquée en compression σ^T qui permet de refermer les fissures matricielles a déjà été exprimée en raisonnant sur la contrainte axiale supportée par la matrice (relation 1.12). On observe effectivement que **les fissures sont refermées lorsque la contrainte appliquée atteint la valeur $-\sigma^T$** où $\sigma^T = E_0\Delta\alpha_z^T\Delta T$ (figure 1.16) :

$$-\sigma^T = -223,7 \text{ MPa pour } \Delta\alpha_z\Delta T = 0,17 \text{ \% et } -\sigma^T = -150 \text{ MPa pour } \Delta\alpha_z\Delta T = 0,1 \text{ \%}.$$

De plus le comportement au cours du déchargement est linéaire avant la fermeture des fissures et **les droites contrainte/déformation sont concourantes au point $(-\varepsilon^T, -\sigma^T)$** avec

$$\begin{cases} \varepsilon^T &= \Delta\alpha_z^T \Delta T \\ \sigma^T &= E_0 \Delta\alpha_z^T \Delta T \end{cases} \quad \text{et} \quad \Delta\alpha_z^T = \Delta\alpha_z \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0} . \quad (1.27)$$

Ces droites contrainte/déformation au cours des cycles sont décrites par

$$\sigma = E(L) (\varepsilon - \varepsilon_r(L)) , \quad (1.28)$$

en fonction du module longitudinal $E(L)$ et des déformations résiduelles $\varepsilon_r(L)$.

On souhaite vérifier que ces expressions sont cohérentes avec le point de convergence des droites exprimées par l'équation 1.27. Si $(\varepsilon^*, \sigma^*)$ est le point d'intersection de ces droites alors

$$E_0 \varepsilon^* = E(L) (\varepsilon^* - \varepsilon_r(L)) \quad \text{soit} \quad \varepsilon^* = -\frac{1}{\frac{E_0}{E(L)} - 1} \varepsilon_r(L) . \quad (1.29)$$

En utilisant les expressions de $E(L)$ (1.5) et de $\varepsilon_r(L)$ (1.19), on obtient

$$\frac{E_0}{E(L)} - 1 = D_1^0 \frac{R_f}{L} \quad \text{et} \quad \varepsilon_r(L) = \Delta\alpha_z^T \Delta T D_1^0 \frac{R_f}{L} , \quad (1.30)$$

ce qui donne à nouveau ε^* indépendant de l'endommagement avec

$$\varepsilon^* = -\Delta\alpha_z^T \Delta T = -\varepsilon^T . \quad (1.31)$$

La mise en évidence de ce point de convergence $(-\varepsilon^T, -\sigma^T)$ permet d'évaluer les contraintes résiduelles dans la direction axiale à partir des essais de traction cyclés expérimentaux.

Estimation des ouvertures axiales de fissures

Les ouvertures de fissures ΔU sont évaluées à l'aide des simulations du microcomposite en traction (figure 1.17). Ces ouvertures axiales sont maximales au niveau de la surface extérieure de la matrice et tendent vers 0 lorsque l'on se rapproche de la fibre. Ces mesures sont réalisées sur la surface extérieure de la matrice. On vérifie que les fissures sont bien refermées en compression lorsque la contrainte axiale appliquée σ atteint $-\sigma^T$.

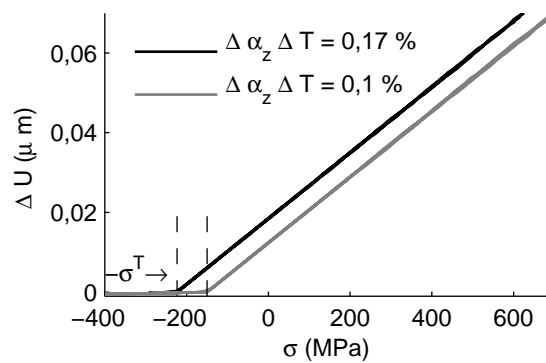


Figure 1.17 – Ouvertures de fissure ΔU évaluées à l'aide du MZC en fonction de la contrainte appliquée σ . L'influence des contraintes résiduelles axiales est étudiée avec la déformation $\Delta\alpha_z \Delta T$.

On propose d'exprimer l'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma)$ en fonction de la contrainte appliquée σ et de la contrainte résiduelle σ^T simplement par

$$\Delta U(\sigma) = \begin{cases} KR_f \frac{\sigma + \sigma^T}{E_0} & \text{si } \sigma > -\sigma^T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , \quad (1.32)$$

où K est un coefficient à identifier à partir des caractéristiques du minicomposite. Pour le minicomposite étudié, on trouve $K = 3,5$.

III Mécanisme de décohésion interfaciale au droit d'une fissure matricielle, sans frottement

La fissuration matricielle induit une forte concentration de contraintes à l'interface fibre/matrice susceptible d'amorcer une décohésion interfaciale [Li, 2000][Martin et al., 2001]. Les observations expérimentales montrent en effet la présence d'une décohésion interfaciale lorsque l'interface est suffisamment faible [Lissart, 1994]. Il est donc nécessaire de prendre en compte la présence de fissures interfaciales et on suppose que l'amorçage d'une fissure matricielle entraîne une décohésion à l'interface fibre/matrice.

La décohésion interfaciale est **d'abord considérée sans frottement**. L'objectif est d'exprimer les propriétés mécaniques du minicomposite contenant fissures matricielles et décohésions. D'autre part, on souhaite analyser la propagation de la décohésion par une approche fondée sur la mécanique de la rupture. Le modèle de zones cohésives est enrichi pour prendre en compte la décohésion et une comparaison avec la mécanique de la rupture est présentée. Cette étude suit la même démarche que précédemment en abordant successivement :

- les propriétés mécaniques du minicomposite,
- la modélisation fondée sur la mécanique de la rupture,
- le développement du Modèle de Zones Cohésives pour la décohésion interfaciale,
- et l'analyse d'un essai de traction cyclée et ouverture de la fissure matricielle.

III.1 Modélisation fondée sur la mécanique de la rupture

Les propriétés mécaniques du minicomposite endommagé sont d'abord exprimées en prenant en compte la fissuration matricielle et la décohésion interfaciale. Les relations déjà présentées pour la fissuration matricielle seule sont à nouveau utilisées et enrichies.

Module longitudinal et déformations résiduelles en fonction du pas de fissuration matricielle et de la longueur de décohésion

Une modélisation EF permet d'abord de déterminer le module longitudinal du microcomposite en présence de la fissure matricielle et d'une décohésion interfaciale de longueur d . On suppose que les fissures matricielles sont périodiquement réparties et espacées d'une distance L qui représente le pas de fissuration. Comme précédemment une cellule élémentaire 2D axisymétrique est utilisée pour les analyses EF (figure 1.18).

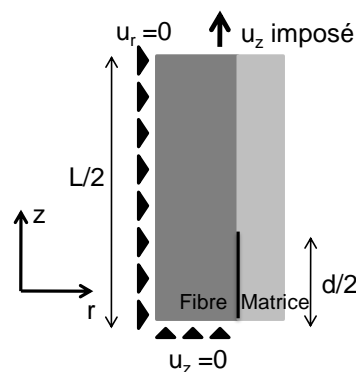


Figure 1.18 – Cellule élémentaire 2D axisymétrique représentative du microcomposite endommagé en traction, en présence d'une fissure matricielle (pas de fissuration L) et d'une fissure interfaciale de longueur d . Un déplacement axial u_z est imposé sur le bord supérieur de la cellule.

Les caractéristiques du microcomposite étudié sont toujours celles du tableau 1.1 (géométrie, propriétés élastiques fibre et matrice, coefficients de dilatation thermique). Une condition de contact sans frottement à l'interface entre la fibre et la matrice est imposée. Le maillage EF utilisé est raffiné en front de fissure au niveau de la pointe de décohésion. La taille des éléments du maillage est celle déjà indiquée par la figure 1.3 de sorte à pouvoir garantir la convergence du module.

Le module $E(L, d)$ peut alors être déterminé par calcul EF (figure 1.19). La présence de la décohésion interfaciale entraîne une perte de rigidité supplémentaire.

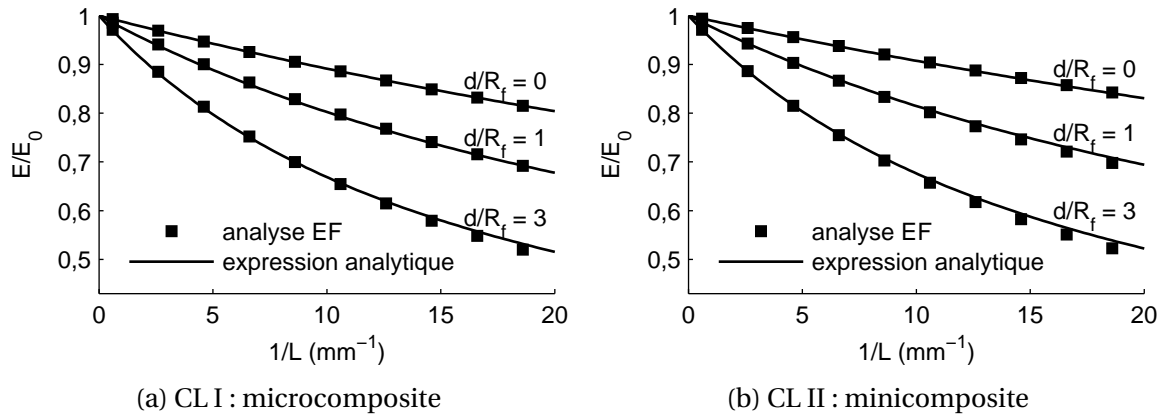


Figure 1.19 – Module longitudinal $E(L, d)$ en fonction de la densité de fissuration $1/L$ déterminé d'une part par les analyses EF à partir des cellules élémentaires et d'autre part à l'aide de l'expression analytique (équation 1.33). Les deux types de conditions aux limites (CL) ont été étudiés (figure 1.1).

Le module longitudinal calculé par EF est comparé à l'expression de $E(L, d)$ de [Hutchinson et Jensen, 1990] à partir des deux variables d'endommagement (L, d). Ces auteurs supposent que la matrice reste en contact sans frottement avec la fibre dans la zone de glissement. De façon analogue à $E(L)$ (1.5), le module $E(L, d)$ s'exprime par

$$E(L, d) = \frac{E_0}{1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad D_1(L, d) = D_1^0 \left(1 - \frac{d}{L} \right) + 4V_f \frac{E_0}{E_m} \frac{d}{R_f} c_1^2, \quad (1.33)$$

en fonction des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice ainsi que des coefficients D_1^0 et c_1 . Sans décohésion interfaciale ($d = 0$), on retrouve bien l'expression du module $E(L)$ précédente (1.5) car $D_1(L, d = 0) = D_1^0$. Une bonne corrélation des valeurs de $E(L, d)$ avec les résultats numériques est observée (figure 1.19).

Le coefficient D_1^0 a été identifié précédemment par calculs par EF (figure 1.5) et dépend de la fraction volumique de fibre V_f , du contraste fibre/matrice E_f/E_m et du type de conditions aux limites (CL) (figure 1.1).

Le **coefficient c_1** dépend des caractéristiques du microcomposite et du type de conditions aux limites. En considérant des coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice identiques $\nu_f = \nu_m = \nu$ ainsi que des CL I, le coefficient c_1 s'écrit

$$c_1^2 = \frac{(1 + \nu)(1 - V_f)E_m^2(E_f + (1 - 2\nu)E_0)}{4V_f^2 E_0 E_f ((1 + \nu)E_f + (1 - \nu)E_0)}. \quad (1.34)$$

Si $\nu_f \neq \nu_m$ ou pour les CL II, il est nécessaire de déterminer numériquement la valeur du coefficient c_1 à l'aide des expressions de [Hutchinson et Jensen, 1990] (Annexe E). On constate que l'influence du type de CL est négligeable sur la valeur de c_1 (écart de moins de 1 %). La relation 1.34 sera alors utilisée pour calculer c_1 pour les deux types de CL (tableau 1.3).

Conditions aux limites	Coefficients			
	concentration de contraintes D_1^0 (figure 1.5)	contraintes axiales a_1 (1.11)	contraintes résiduelles a_2 (1.9)	décohésion interfaciale c_1^2 (1.34)
CL I	1,74	0,667	0,438	1,27
CL II	1,46			

Tableau 1.3 – Valeurs des coefficients D_1^0 , a_1 , a_2 et c_1^2 nécessaires pour exprimer le module élastique $E(L, d)$ et le coefficient de dilatation $\alpha(L, d)$, pour les deux types de conditions aux limites (CL).

Saturation de l'endommagement

On remarque que lorsque la décohésion atteint toute la longueur du microcomposite, les efforts sont entièrement supportés par la fibre. On peut alors supposer que le module E_{sat} dépend uniquement du module de la fibre avec $E_{sat} = V_f E_f$ ce qui permet d'écrire

$$E_{sat} = \frac{E_0}{1 + D_{sat} \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad D_{sat} \frac{R_f}{L} = \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right). \quad (1.35)$$

En utilisant l'équation 1.33, le module longitudinal obtenu lorsque la décohésion atteint toute la longueur du microcomposite ($d = L$) devient $E_{sat} = E(L, d = L)$ soit

$$E_{sat} = \frac{E_0}{1 + D_1(L, d = L) \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad D_1(L, d = L) \frac{R_f}{L} = 4V_f \frac{E_0}{E_m} c_1^2. \quad (1.36)$$

Enfin, à partir de l'expression du coefficient c_1 (1.34) on peut obtenir

$$D_1(L, d = L) \frac{R_f}{L} = \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \left[\frac{(1 + \nu)(E_f + (1 - 2\nu)E_0)}{(1 + \nu)E_f + (1 - \nu)E_0} \right]. \quad (1.37)$$

La comparaison des expressions 1.35 et 1.37 montre qu'elle sont très similaires. A partir des caractéristiques du microcomposite considéré, le module E_{sat} obtenu par la relation 1.37 dépasse de 3 % celui fourni par la relation 1.35. Ceci est cohérent avec le fait que la relation 1.33 suppose un contact conservé à l'interface fibre/matrice.

Coefficient de dilatation thermique

[Lu et Hutchinson, 1995] ont proposé une expression du coefficient de dilatation axial du microcomposite en fonction du pas de fissuration L et de la longueur de décohésion d . $\alpha(L, d)$ s'écrit de manière analogue à la relation précédente de $\alpha(L)$ (1.15) avec

$$\alpha(L, d) = \alpha_0 + \Delta\alpha_z^T D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \quad \text{et} \quad \Delta\alpha_z^T = \Delta\alpha_z \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0}. \quad (1.38)$$

Si seule la fissuration matricielle est considérée ($d = 0$), alors $D_1(L, d = 0) = D_1^0$, ce qui permet de retrouver l'expression de $\alpha(L)$ (1.15). Finalement $\alpha(L, d)$ dépend des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice, du coefficient D_1^0 ainsi que a_1 , a_2 et c_1 (tableau 1.3).

Le coefficient de dilatation $\alpha(L, d)$ est décroissant de α_0 jusqu'à α_z^f en fonction de $1/L$ et de d/L (figure 1.20). Les valeurs fournies par la relation 1.38 sont comparées aux coefficients de dilatation déterminés par EF. On notera que le contact sans frottement dans la zone de glissement est pris en compte au cours des calculs EF pour empêcher l'interpénétration des éléments liée aux contraintes résiduelles.

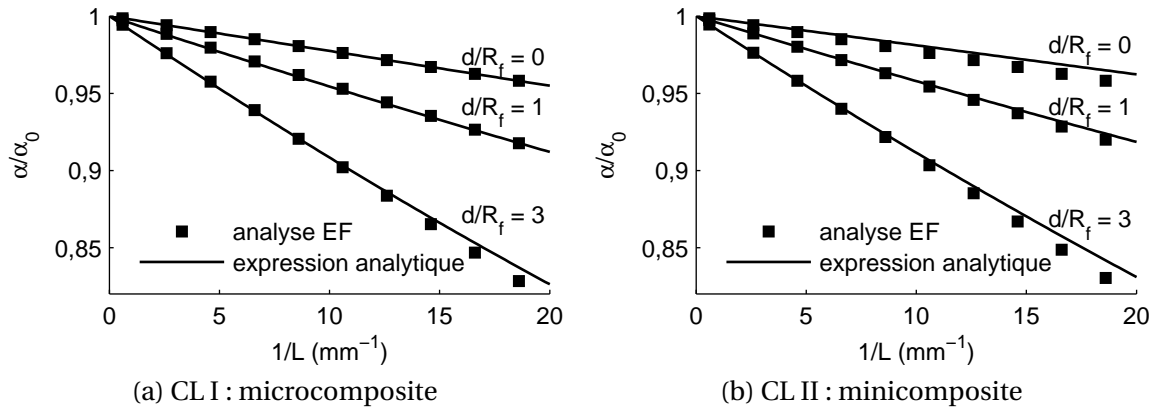


Figure 1.20 – Coefficient de dilatation $\alpha(L, d)$ en fonction de la densité de fissuration $1/L$ déterminé d'une part par les analyses EF et d'autre part à l'aide de l'expression 1.38. Les deux types de conditions aux limites (CL) ont été étudiés (figure 1.1).

Déformations résiduelles

En reprenant le raisonnement précédent (figure 1.8), les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ peuvent être déduites de la différence des coefficients de dilatation thermique par

$$\varepsilon_r(L, d) = -(\alpha_0 - \alpha(L, d)) \Delta T \quad \text{soit} \quad \varepsilon_r(L, d) = D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \Delta \alpha_z^T \Delta T, \quad (1.39)$$

à partir du coefficient $D_1(L, d)$ (1.33) et de $\Delta \alpha_z^T$ (1.12).

Analyse énergétique : Taux de restitution d'énergie lors de la propagation de la décohésion

On souhaite écrire le taux de restitution d'énergie (TRE) lors de la propagation de la décohésion interfaciale du microcomposite en traction. L'objectif est de **déterminer le chargement critique qui permet de propager la décohésion**. Pour cela, un bilan d'énergie pour un incrément de fissuration est nécessaire. L'énergie élastique du microcomposite en traction est exprimée à partir du module longitudinal $E(L, d)$ et du coefficient de dilatation $\alpha(L, d)$.

La **condition énergétique pour la propagation de la décohésion** s'écrit (équation 1.2)

$$-\frac{\partial W_i}{\partial S_i} \geq G_i^c \quad \text{avec} \quad \partial S_i = 2\pi R_f \partial d, \quad (1.40)$$

W_i étant l'énergie élastique du microcomposite fissuré, ∂S_i l'aire de la surface fissurée lors d'une propagation infinitésimale de longueur ∂d et G_i^c l'énergie de rupture de l'interface.

Expression de l'énergie élastique

Le microcomposite est soumis à la fois au chargement de traction et à la variation de température après élaboration ΔT . On rappelle que la déformation totale imposée est la somme du chargement mécanique et thermique (figure 1.8)

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{méca} + \alpha(L, d) \Delta T \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E(L, d)}. \quad (1.41)$$

L'énergie élastique W_i est détaillé en Annexe B (B-25). L'expression obtenue à partir du module élastique, du coefficient de dilatation et de la déformation totale ε_{tot} s'écrit

$$W_i = \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E(L, d) (\varepsilon_{tot} - \alpha(L, d) \Delta T)^2 - \frac{1}{2} \pi L R_m^2 \sigma^T \alpha(L, d) \Delta T, \quad (1.42)$$

où le dernier terme fait intervenir la contrainte résiduelle σ^T (équation 1.12).

Bilan d'énergie

La déformation appliquée ε se détermine en déduisant de ε_{tot} la dilatation thermique du microcomposite sain, soit $\varepsilon = \varepsilon_{tot} - \alpha_0 \Delta T$. En considérant l'énergie élastique (1.42), la variation d'énergie à déformation imposée donne

$$-\frac{\partial W_i}{\partial d} = \frac{1}{2} \pi R_f \frac{E_0 L^2}{V_f (L/R_f + D_1(L, d))^2} \frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} (\varepsilon + \Delta \alpha^T \Delta T)^2. \quad (1.43)$$

Le **taux de restitution d'énergie (TRE)**, avec $G(\varepsilon, L, d) = -\frac{\partial W_i}{\partial S_i}$ en fonction de ε s'écrit donc

$$\boxed{G(\varepsilon, L, d) = \frac{1}{4} \frac{E_0 L^2}{V_f (L/R_f + D_1(L, d))^2} \frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} (\varepsilon + \Delta \alpha^T \Delta T)^2, \quad (1.44)}$$

avec $\frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} = -\frac{D_1^0}{L} + 4V_f \frac{E_0}{E_m} \frac{1}{R_f} c_1^2$

où le terme $\frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d}$ est indépendant de la longueur de décohésion d . Le TRE déterminé à partir de la relation 1.44 a été comparé à son estimation par EF à partir de la différence d'énergie entre deux incréments de longueurs de décohésion. La figure 1.21 illustre le bon accord entre les deux approches.

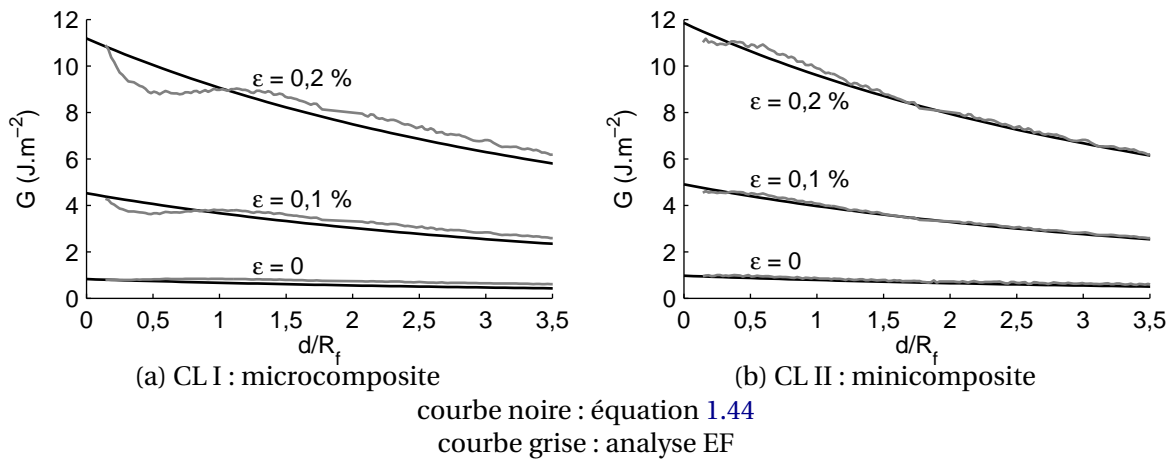


Figure 1.21 – Taux de restitution d'énergie G en fonction de la longueur de décohésion d déterminé d'une part par les analyses EF et d'autre part à l'aide de l'expression analytique (équation 1.44). Par EF les incréments de longueurs de décohésion $\Delta d = 0,25 \mu m$ soit environ $0,3R_f$. La fraction volumique de fibre est $V_f = 0,5$. Les deux types de conditions aux limites CL I et CL II ont été étudiés.

Taux de restitution d'énergie pour de très faibles longueurs de décohésion

La figure 1.21 montre que G décroît lorsque la longueur de décohésion augmente. On peut démontrer que

$$\lim_{d \rightarrow 0} G(\varepsilon, L, d) = +\infty. \quad (1.45)$$

Cet accroissement du taux de restitution d'énergie pour les très faibles longueurs de décohésion résulte de la présence d'une singularité "forte" lorsque le module de la matrice est supérieur à celui du renfort [Martin et al., 2001]. La relation 1.44 ne représente pas cette variation rapide de G pour $d \rightarrow 0$ et n'est valable que pour $d > \frac{R_f}{2}$.

Critère de propagation de la décohésion

Le TRE G a été exprimé en fonction de la déformation axiale. On s'intéresse à l'évolution de G avec la contrainte appliquée σ pour aboutir à un critère de propagation de la décohésion.

La déformation appliquée ε peut se décomposer comme la somme de la déformation élastique et de la déformation résiduelle $\varepsilon_r(L, d)$ avec

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(L, d)} + \varepsilon_r(L, d). \quad (1.46)$$

Puis en utilisant l'expression du module 1.33 et de la déformation résiduelle 1.39 on obtient l'équation

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \right) + D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \Delta \alpha_z^T \Delta T. \quad (1.47)$$

Enfin après simplification, le taux de restitution d'énergie (équation 1.44) s'écrit en fonction de la contrainte appliquée σ , par l'équation

$$G(\sigma, L, d) = \frac{1}{4} \frac{E_0 R_f^2}{V_f} \frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} \left(\frac{\sigma}{E_0} + \Delta \alpha^T \Delta T \right)^2. \quad (1.48)$$

La dérivée du coefficient $D_1(L, d)$ par rapport à d ne dépend pas de la longueur de décohésion. On remarque alors que cette expression du **TRE en fonction de σ est indépendante de la longueur de décohésion**. Après avoir remplacé $\frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d}$ (1.44), le TRE s'écrit

$$G(\sigma, L) = \frac{R_f}{E_0} \left(\frac{E_0}{E_m} c_1^2 - \frac{1}{4V_f} D_1^0 \frac{R_f}{L} \right) (\sigma + \sigma^T)^2, \quad (1.49)$$

en introduisant la contrainte résiduelle $\sigma^T = E_0 \Delta \alpha^T \Delta T$.

Le taux de restitution d'énergie ainsi exprimé peut être comparé à l'estimation proposée par [Hutchinson et Jensen, 1990] avec

$$G(\sigma) = \frac{R_f}{E_m} c_1^2 (\sigma + \sigma^T)^2. \quad (1.50)$$

Les deux expressions 1.49 et 1.50 donnent des valeurs du TRE presque identiques (au plus 2 % d'écart). Le terme $\frac{1}{4V_f} D_1^0 \frac{R_f}{L}$ est en fait petit devant $\frac{E_0}{E_m} c_1^2$ même pour de grandes densités de fissuration $1/L$.

En utilisant la relation simplifiée 1.50, la condition de propagation de la décohésion 1.40 devient

$$\frac{R_f}{E_m} c_1^2 (\sigma + \sigma^T)^2 \geq G_i^c. \quad (1.51)$$

La contrainte appliquée critique σ^{ci} lors de la propagation de la décohésion s'écrit donc simplement

$$\sigma^{ci} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T. \quad (1.52)$$

Cette expression fait intervenir uniquement **l'énergie de rupture de l'interface G_i^c** , les caractéristiques du microcomposite, le coefficient c_1 (1.34) et la **contrainte résiduelle σ^T** (1.12).

III.2 Utilisation d'un Modèle de Zones Cohésives

La propagation de la décohésion interfaciale a été analysée à l'aide de la mécanique de la rupture. **Sans frottement, la décohésion se propage lorsque la contrainte appliquée σ atteint σ^{ci} (eq 1.52) qui est indépendante de la longueur de décohésion.** On utilise maintenant un modèle de zones cohésives (MZC) permettant cette fois ci de simuler à la fois l'amorçage de la fissure matricielle et la propagation de la décohésion à l'interface entre la fibre et la matrice. On pourra **comparer le chargement de traction lors de la propagation de la décohésion** et déterminer l'évolution de la longueur de décohésion. L'intérêt principal du MZC est de pouvoir considérer le glissement frottant, ce qui sera réalisé par la suite.

La cellule 2D axisymétrique représentative du microcomposite est à nouveau générée et le maillage est réalisé. Comme précédemment des éléments endommageables sont insérés au centre de la matrice perpendiculairement à la direction axiale du chargement pour simuler la fissuration matricielle. D'autres MZC sont insérés sur toute l'interface fibre/matrice pour simuler la décohésion interfaciale. La taille des éléments du maillage h_{mMZC} et h_{iMZC} au voisinage des MZC, insérés pour simuler la fissure matricielle et la décohésion interfaciale respectivement, sont paramétrables (figure 1.22).

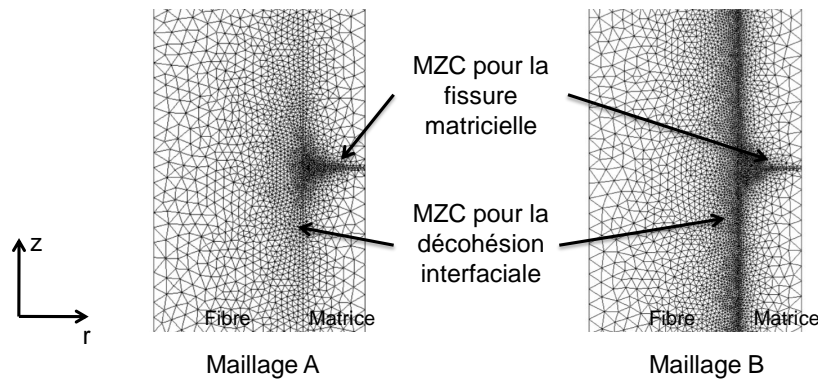


Figure 1.22 – Maillages 2D axisymétriques représentatifs du microcomposite avec insertion des MZC. Les maillages sont paramétrables en fonction de la taille des éléments h_{mMZC} au niveau des MZC pour simuler la fissure matricielle et h_{iMZC} à l'interface fibre/matrice. Les deux maillages A et B ont été réalisés avec une taille des éléments de la matrice h_m telle que $h_m/R_f = 1/20$. Pour le maillage A : $h_{mMZC}/R_f = 1/100$ et $h_{iMZC}/R_f = 1/50$. Pour le maillage B : $h_{mMZC}/R_f = h_{iMZC}/R_f = 1/100$.

Ce modèle de zones cohésives repose également sur la définition de la loi endommageable qui permet de simuler l'amorçage et la propagation des fissures. Pour la fissure matricielle, la loi bilinéaire proposée précédemment est utilisée (section II.2, page 39). Cette loi fait intervenir la contrainte maximale σ_{max} de la matrice et l'énergie de rupture G_m^c . Un deuxième MZC est proposé pour modéliser la propagation de la décohésion interfaciale.

Description de la loi d'endommagement pour la décohésion interfaciale

Le modèle de Tvergaard-Needleman [Tvergaard, 1990] a été choisi pour la propagation de la décohésion interfaciale. Une description de cette loi est proposée avant de justifier le choix de ce modèle pour cette application (figure 1.23). Les déplacements relatifs des nœuds de l'interface $[U_n; U_t]$ (déplacements relatifs normaux et tangentiels) dépendent des efforts correspondants $[T_n; T_t]$ par un module endommageable fonction de la variable d'endommagement continue λ .

Les équations du modèle sont

$$T_n = \begin{cases} \frac{27}{4} \sigma_{max,n} F(\lambda_{max}) \frac{U_n}{\delta_n} & \text{si } U_n > 0 \\ \frac{27}{4} \alpha_c \sigma_{max,n} \frac{U_n}{\delta_n} & \text{si } U_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad T_t = \frac{27}{4} \sigma_{max,i} F(\lambda_{max}) \frac{U_t}{\delta_t} . \quad (1.53)$$

δ_n et δ_t sont les déplacements maximaux respectivement normaux et tangentiels que peuvent adopter les nœuds de l'interface en chargement pur avant la rupture totale.

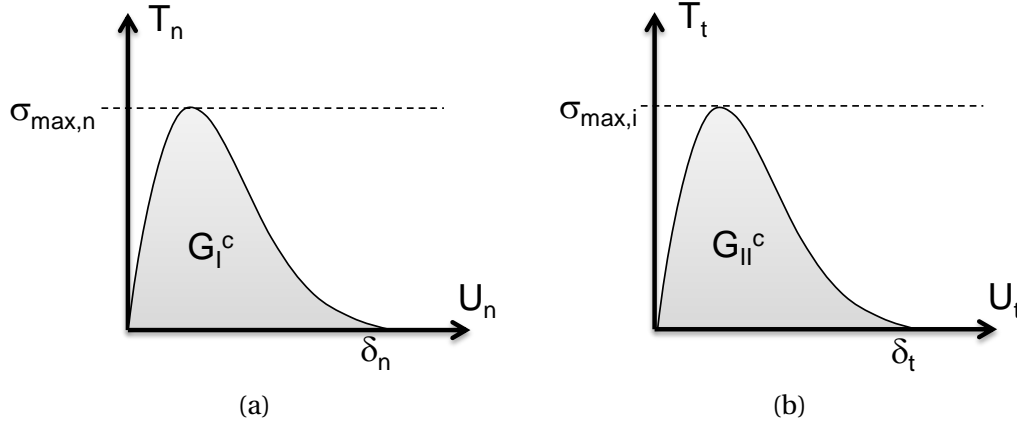


Figure 1.23 – Détail du modèle de zones cohésives de Tvergaard en dimension 2. Les figures représentent le comportement normal (a) et tangential (b), qui relient les efforts normaux et tangentiels $[T_n; T_t]$ aux déplacements relatifs $[U_n; U_t]$.

L'endommagement est pris en compte par le biais de la variable λ et de la fonction $F(\lambda)$ qui ont les formes suivantes

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{U_n}{\delta_n}\right)^2 + \left(\frac{U_t}{\delta_t}\right)^2} \quad \text{et} \quad F(\lambda) = (1 - \lambda)^2 . \quad (1.54)$$

La variable d'endommagement λ varie continument de $\lambda = 0$ (élément d'interface sain) à $\lambda = 1$ (rupture complète de l'élément d'interface).

Les paramètres $\sigma_{max,n}$ et $\sigma_{max,i}$ ont la valeur maximale que peuvent prendre respectivement les efforts T_n et T_t en chargement pur (traction pur et cisaillement pur). Ces contraintes maximales sont obtenues lorsque la variable d'endommagement vaut $\lambda = \frac{1}{3}$. Une fois que l'élément d'interface est rompu, le contact entre les deux surfaces fissurées est pris en compte, lorsque la condition $U_n < 0$ est satisfaite (fissure fermée en compression radiale). Les deux surfaces des éléments d'interface ne s'interpénètrent pas, ce qui se traduit par un effort normal non nul (équation 1.53).

L'ensemble des paramètres nécessaires pour la mise en œuvre de cette loi sont $\sigma_{max,n}$, δ_n et α_c pour les efforts normaux ainsi que $\sigma_{max,i}$ et δ_i pour les efforts tangentiels.

Le lien avec la mécanique de la rupture pour le modèle de Tvergaard-Needleman est obtenu en écrivant

$$G_I^c = \int_0^{\delta_n} T_n dU_n = \frac{9}{16} \sigma_{max,n} \delta_n \quad (1.55)$$

$$G_{II}^c = \int_0^{\delta_t} T_t dU_t = \frac{9}{16} \sigma_{max,i} \delta_t ,$$

où G_I^c et G_{II}^c représentent respectivement les énergies de rupture en mode I et en mode II (figure 1.23). Comme précédemment, l'amorçage de la décohésion est piloté par les contraintes maximales $\sigma_{max,i}$ et $\sigma_{max,n}$ et la propagation est gouvernée par G_I^c et G_{II}^c .

Au cours des paragraphes suivants, plusieurs points sont à traiter pour pouvoir modéliser la propagation de la décohésion à l'aide de ce modèle de zones cohésives :

1. La décohésion interfaciale est gouvernée par le mode de cisaillement. On suppose que ceci est vrai même pour des petites longueurs de décohésion.

Dans ce cas l'évolution de la décohésion interfaciale est pilotée par les deux valeurs $(\sigma_{max,i}, G_i^c)$ où $G_i^c = \frac{9}{16} \sigma_{max,i} \delta_t$ est l'énergie de rupture de la matrice en mode II.

2. La rigidité initiale des éléments endommageables (dans la direction axiale et radiale) doit être suffisamment élevée sinon plusieurs problèmes apparaissent : trop grande souplesse du microcomposite, amorçage trop précoce de la fissure matricielle et surtout une mauvaise modélisation des contraintes résiduelles axiales et radiales. Ce dernier point est important surtout lorsqu'on souhaitera étudier le frottement dans la zone de glissement, à l'aide de la condition de Coulomb.

On note en particulier la rigidité initiale dans la direction tangentielle K_{iMZC} qui s'exprime par $K_{iMZC} = \frac{27}{4} \frac{\sigma_{max,i}}{\delta_t}$.

Il est aussi nécessaire que ces éléments endommageables soient suffisamment rigides dans la direction normale en compression. On note K_{nMZC} cette valeur qui peut s'écrire $K_{nMZC} = \frac{27}{4} \frac{\alpha_c \sigma_{max,n}}{\delta_n}$.

3. L'analyse par l'approche énergétique a montré que la fissure est déviée à l'interface avec un régime de propagation instable sur de très faibles longueurs de décohésion. La décohésion se propage ensuite dès que la contrainte appliquée a atteint σ^{ci} .

Avec le modèle de zones cohésives, l'amorçage de la fissure est pilotée par $\sigma_{max,i}$. La concentration de contraintes en pointe de fissure matricielle doit être bien modélisée pour déclencher la nucléation de la fissure interfaciale. Ceci nécessite un maillage suffisamment raffiné le long de l'interface et surtout en pointe de fissure matricielle.

Les simulations obtenues des courbes contrainte/déformation ont été comparées avec les résultats d'autres modèles de zones cohésives et avec le modèle analytique. Le but est de justifier le choix de la loi d'endommagement de Tvergaard-Needleman.

4. Ensuite on souhaite pouvoir déterminer la valeur de la longueur de décohésion au cours du chargement de traction à l'aide de ce modèle fondé sur la mécanique de l'endommagement. Une méthode a été proposée.

On pourra comparer les contraintes σ^{ci} , à l'origine de la propagation de la décohésion interfaciale, déterminées à partir des deux modèles.

Simulation de l'essai de traction

On rappelle que les caractéristiques de la cellule élémentaire étudiée sont toujours données dans le [tableau 1.1](#). Les conditions aux limites de type I sont considérées ([figure 1.1](#)).

Pour toute la suite on utilisera les mêmes valeurs de la contrainte maximale $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$ et de l'énergie de rupture $G_m^c = 3 \text{ J.m}^{-2}$ à l'amorçage de la fissure matricielle. Le MZC utilisé pour la fissure matricielle est la loi bilinéaire déjà étudiée (section [II.2](#), page [39](#)).

La figure 1.24 illustre l'évolution des deux mécanismes d'endommagement obtenue avec ce modèle de zones cohésives au cours de la traction de la cellule. La décohésion interfaciale induit une zone de transfert des efforts entre la fibre et la matrice. La contrainte axiale de la matrice s'annule et la fibre supporte seule le chargement. On note aussi que les contraintes résiduelles sont directement observables lorsque la cellule est déchargée ($\sigma = 0$).

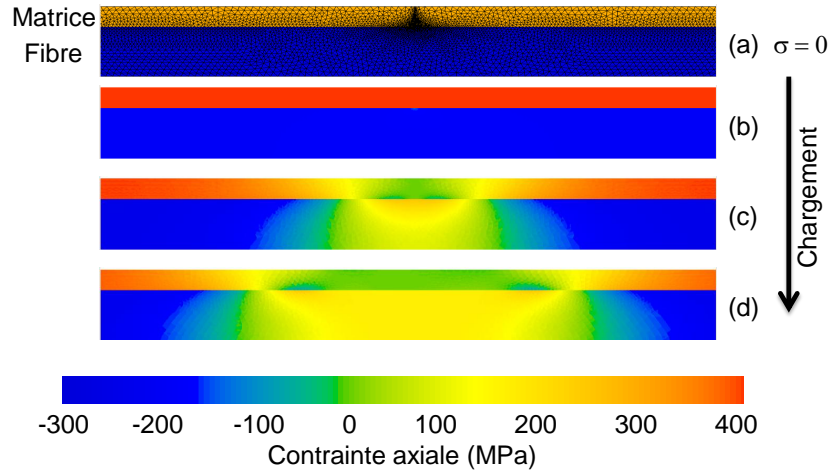


Figure 1.24 – Evolution du champ de contraintes axial dans la fibre et dans la matrice au cours de la fissuration matricielle (fissure au centre de la cellule) et de la décohésion à l'interface fibre/matrice. Le microcomposite est chargé en traction. Les paramètres d'amorçage et de propagation de la décohésion interfaciale $\sigma_{max,i} = 300 \text{ MPa}$ et $G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$.

Les courbes contrainte/déformation (figure 1.25) permettent d'observer la contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle, la contrainte à l'amorçage de la décohésion interfaciale si elle est plus élevée (figure a), puis la propagation de la décohésion. **La propagation de la décohésion se réalise bien pour une contrainte appliquée égale à σ^{ci} (1.52) indépendante de la longueur de décohésion. Cette contrainte σ^{ci} dépend uniquement de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c quelle que soit la contrainte tangentielle d'amorçage $\sigma_{max,i}$.**

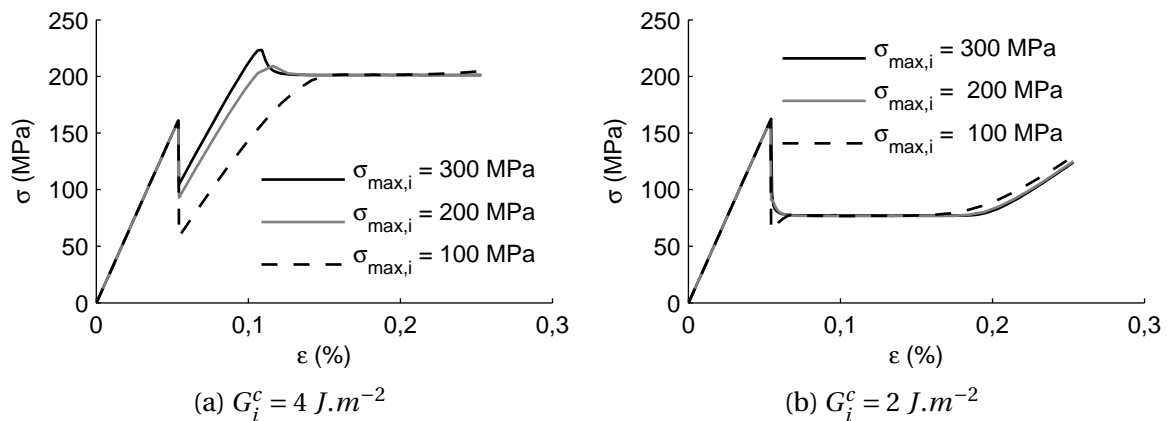


Figure 1.25 – Courbes contrainte/déformation lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale. Ces simulations sont obtenues à partir du modèle de zones cohésives en choisissant l'énergie de rupture de l'interface $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ (a) et $G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$ (b). Plusieurs valeurs de la contrainte tangentielle maximale $\sigma_{max,i}$ sont étudiées.

Si l'énergie de rupture G_i^c est faible, la déviation de fissure à l'interface est instantanée (figure b) lors de l'amorçage de la fissure matricielle. L'amorçage de la fissure matricielle accompagnée de la décohésion interfaciale entraîne une chute de contrainte plus forte. La contrainte appliquée σ est alors égale à σ^{ci} et la décohésion continue de se propager pour

$\sigma = \sigma^{ci}$ constante. Puis lorsque la décohésion a atteint toute la longueur de la cellule, le comportement de la cellule est piloté par la fibre seule.

Si au contraire G_i^c est plus élevée, il est nécessaire d'accroître le chargement de traction pour propager la décohésion interfaciale après l'amorçage de la fissure matricielle (figure a). Avec le MZC, la contrainte à l'amorçage de la décohésion dépend de la finesse du maillage en pointe de fissure matricielle ainsi que de la contrainte tangentielle maximale $\sigma_{max,i}$. Ceci peut entraîner une contrainte à l'amorçage de la décohésion plus élevée que la contrainte σ^{ci} si la valeur de la contrainte $\sigma_{max,i}$ est trop importante. A l'opposé si la contrainte $\sigma_{max,i}$ est trop faible, la rigidité initiale des éléments d'interface est trop souple et on observe une trop grande perte de rigidité après l'amorçage de la fissure matricielle.

Rigidité initiale et choix des paramètres du modèle

Les paramètres du MZC ont été choisis en fonction des deux critères $\sigma_{max,i}$ et G_i^c ainsi qu'en fonction des valeurs requise pour la rigidité initiale des éléments endommageables. La valeur de δ_t se déduit de l'expression de l'énergie de rupture (1.55) ce qui donne

$$\delta_t = \frac{16}{9} \frac{G_i^c}{\sigma_{max,i}} . \quad (1.56)$$

Une étude a été réalisée pour déterminer les valeurs des rigidités initiales K_{iMZC} en cisaillement et K_{nMZC} dans la direction normale en compression. Ces rigidités doivent être suffisamment élevées pour bien modéliser les contraintes résiduelles dans la direction axiale et radiale, ne pas diminuer la rigidité du microcomposite simulé et ne pas influencer l'amorçage de la fissure matricielle. Les conditions déterminées sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{iMZC} \frac{R_f}{E_f} \geq 0,3 \quad \text{avec} \quad K_{iMZC} = \frac{27}{4} \frac{\sigma_{max,i}}{\delta_t} \quad (a) \\ K_{nMZC} \frac{R_f}{E_f} \geq 20 \quad \text{avec} \quad K_{nMZC} = \frac{27}{4} \frac{\alpha_c \sigma_{max,n}}{\delta_n} \quad (b) . \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Pour que la première condition soit satisfaite (1.57a) il est nécessaire que la contrainte $\sigma_{max,i}$ soit supérieure à

$$\sigma_{max,i} \geq 0,3 \left(\frac{E_f}{R_f} G_i^c \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (1.58)$$

Le modèle de Tvergaard-Needleman permet de modéliser le couplage entre les efforts normaux et tangentiels. Dans cette étude on considère uniquement l'endommagement résultant des contraintes tangentiels. Les paramètres $\sigma_{max,n}$, δ_n et α_c du MZC concernant les efforts normaux sont choisis pour que la rigidité initiale dans la direction normale soit suffisamment élevée (1.57b) : on choisi $\alpha_c = 1$, $\sigma_{max,n} = \sigma_{max,i}$ et compte tenu de l'équation 1.57, le saut de déplacement δ_n doit être supérieur à

$$\delta_n \geq \frac{27}{80} \alpha_c \sigma_{max,n} \frac{R_f}{E_f} . \quad (1.59)$$

En résumé, le modèle de zones cohésives permet de simuler l'amorçage et la propagation de la décohésion interfaciale à partir des deux critères $\sigma_{max,i}$ et G_i^c . La contrainte $\sigma_{max,i}$ et les paramètres δ_t , $\sigma_{max,n}$, δ_n et α_c sont calculés à partir des conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{max,i} \geq 0,3 \left(\frac{E_f}{R_f} G_i^c \right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta_t = \frac{16}{9} \frac{G_i^c}{\sigma_{max,i}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_c = 1 \text{ et } \sigma_{max,n} = \sigma_{max,i} \\ \delta_n \geq \frac{27}{80} \alpha_c \sigma_{max,n} \frac{R_f}{E_f} \end{array} \right. . \quad (1.60)$$

En ce qui concerne la taille des éléments du maillage à l'interface loin de la fissure matricielle, aucune influence n'a été observée sur la courbe contrainte/déformation simulée pour une taille de maillage telle que $h_{iMZC}/R_f \geq 1/20$. On choisit donc de générer les maillages EF en fonction de $h_{iMZC}/R_f = 1/20$ (figure 1.22).

Justification du choix du modèle

On souhaite montrer que le **modèle de Tvergaard-Needleman** est adapté pour simuler la propagation de la décohésion après l'amorçage de la fissure matricielle. Ce modèle permet de paramétrer à la fois l'endommagement et la rigidité initiale en fonction de $\sigma_{max,i}$ et G_i^c à partir de la fonction $F(\lambda)$. Cela implique une condition sur ces deux paramètres (1.58).

La différence principale de ce modèle avec celui de [Alfano et Crisfield, 2001] est qu'il est nécessaire que la contrainte $\sigma_{max,i}$ soit suffisamment élevée pour que la rigidité initiale K_{iMZC} remplisse la condition définie. Le modèle de Crisfield comme nous l'avons vu précédemment (figure 1.10) fait intervenir un paramètre supplémentaire (U_{0n} et U_{0t} de manière analogue) autorisant de choisir la rigidité initiale indépendamment des critères d'amorçage et de propagation. Ce modèle permettrait de choisir des valeurs de $\sigma_{max,i}$ plus faibles.

Les courbes contrainte/déformation simulées à partir des deux MZC lors de la propagation de la décohésion ont été comparées (figure 1.26) et les résultats sont très similaires. Pour une contrainte $\sigma_{max,i}$ plus faible (figure 1.26b), la rigidité initiale avec le modèle de Crisfield est alors toujours élevée. La décohésion s'amorce pour une contrainte inférieure à σ^{ci} mais on n'observe pas que le modèle de Crisfield permette de réduire complètement la perte de rigidité après l'amorçage de la fissure matricielle. En outre le modèle de [Tvergaard, 1990] implique une perte de rigidité continue et une convergence plus rapide a été observée.

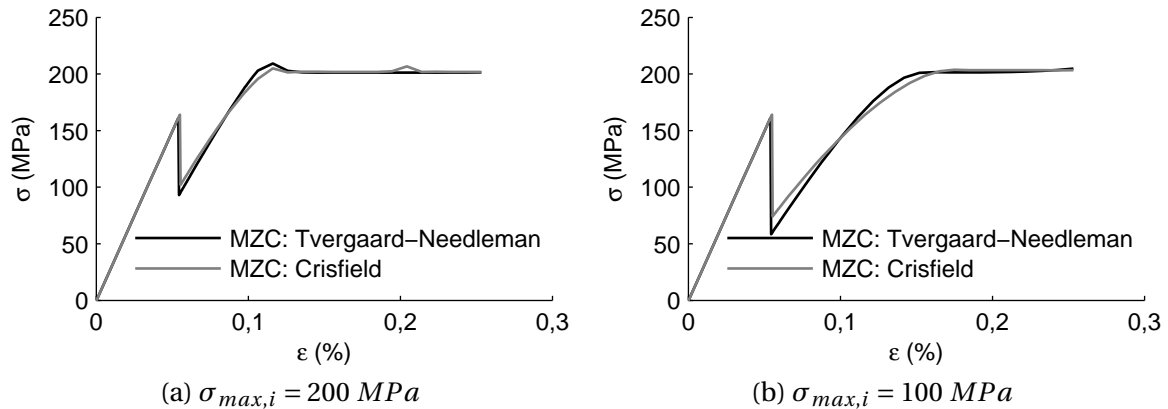


Figure 1.26 – Courbes contrainte/déformation lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion pour une énergie de rupture $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$. Ces simulations sont obtenues à partir des modèles de zones cohésives avec la contrainte tangentielle maximale $\sigma_{max,i} = 200 \text{ MPa}$ (a) et $\sigma_{max,i} = 100 \text{ MPa}$ (b). Le modèle de Tvergaard-Needleman et comparé au modèle de Crisfield.

Comparaison avec l'approche basée sur la mécanique de la rupture

Les simulations de la propagation de décohésion en traction obtenues avec le MZC sont comparées avec le modèle analytique. On s'intéresse surtout à l'évolution de la longueur de décohésion au cours de l'essai de traction et une méthode est proposée pour l'évaluer.

Simulation de la réponse en traction

Les expressions formulées à partir de l'analyse énergétique (contrainte σ^c (1.24) à l'amorçage de la fissure matricielle et contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale (1.52)) ainsi que des expressions du module $E(L, d)$ (1.33) et des déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ (1.39), permettent de simuler la courbe de traction lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale.

La contrainte et la déformation appliquée à l'**amorçage de la fissure matricielle** sont données par les équations

$$\sigma = \sigma^c \text{ avec } \sigma^c = \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} \sigma_{max} - \sigma^T \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^c \text{ avec } \varepsilon^c = \frac{\sigma^c}{E_0}, \quad (1.61)$$

où σ_{max} est la contrainte maximale supportée par la matrice. La contrainte σ^c a été exprimée par la relation 1.24 ainsi que le coefficient a_1 (1.11) et la contrainte résiduelle σ^T (1.12).

Pour modéliser le comportement (σ, ε) après l'amorçage de la fissure, il faut ensuite considérer la **contrainte σ^{ci}** (1.52) et envisager les deux possibilités suivantes :

1. si $\sigma^c < \sigma^{ci}$ (figure 1.27a) :

a) Juste après l'amorçage de la fissure la perte de rigidité implique

$$\sigma = E(L, d = 0) [\varepsilon^c - \varepsilon_r(L, d = 0)] \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^c. \quad (1.62)$$

b) Ensuite lorsque la contrainte appliquée σ atteint σ^{ci} , la contrainte et la déformation à partir desquelles la décohésion commence à se propager sont données par les équations

$$\sigma = \sigma^{ci} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\sigma^{ci}}{E(L, d = 0)} + \varepsilon_r(L, d = 0). \quad (1.63)$$

2. si $\sigma^c \geq \sigma^{ci}$ (figure 1.27b) :

Juste après l'amorçage de la fissure matricielle accompagnée de la décohésion,

$$\sigma = \sigma^{ci} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^c. \quad (1.64)$$

On observe que les deux modèles donnent un comportement en traction similaire. La contrainte appliquée σ^{ci} qui permet de propager la décohésion est identique.

Evolution de la longueur de décohésion

On propose de déterminer la longueur de décohésion d en utilisant les expressions du module $E(L, d)$ (1.33), des déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ (1.39) et de la réponse en traction contrainte/déformation (σ, ε) . Au cours de l'étude proposée, la fissure matricielle est insérée dans la cellule de longueur $L = 100 \mu m$. Il est alors possible de **déduire d de la courbe contrainte/déformation à partir d'une équivalence en rigidité**.

La relation entre σ et ε à un état d'endommagement donné s'écrit

$$\sigma = E(L, d) [\varepsilon - \varepsilon_r(L, d)]. \quad (1.65)$$

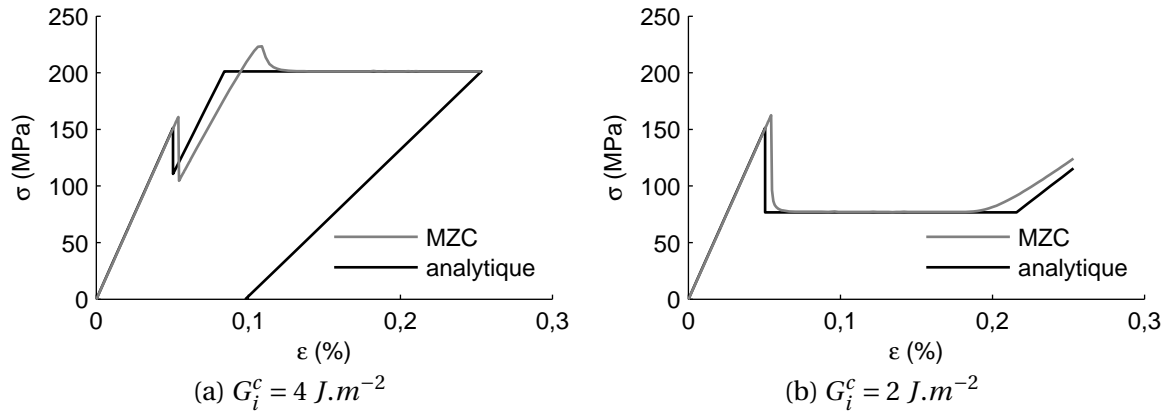


Figure 1.27 – Courbes contrainte/déformation lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohesion. Ces simulations sont obtenues à partir du modèle de zones cohésives avec l'énergie de rupture de l'interface $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ (a) et $G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$ (b). La contrainte tangentielle maximale $\sigma_{max,i} = 300 \text{ MPa}$. Le modèle de zones cohésives est comparé au modèle analytique.

En combinant ces trois équations, le paramètre d'endommagement $D_1(L, d)$ est obtenu par

$$D_1(L, d) \frac{R_f}{L} = \frac{E_0 \varepsilon - \sigma}{\sigma + \sigma^T} . \quad (1.66)$$

Puis en remplaçant $D_1(L, d)$ par son expression en fonction des variables d'endommagement (équation 1.33), on obtient l'expression de la longueur de décohesion en fonction de la contrainte et de la déformation appliquée

$$\frac{d}{L} = \left(\frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} \right)^{-1} \left(\frac{E_0 \varepsilon - \sigma}{\sigma + \sigma^T} - D_1^0 \frac{R_f}{L} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial D_1(L, d)}{\partial d} = 4V_f \frac{E_0}{E_m} c_1^2 - D_1^0 \frac{R_f}{L} . \quad (1.67)$$

L'évolution de la longueur de décohesion peut alors être déterminée à partir des courbes de traction simulées (figure 1.27). La longueur de décohesion croît linéairement en fonction de la déformation appliquée (figure 1.28). Une énergie de rupture plus faible favorise la décohesion. Lorsque $\sigma^c < \sigma^{ci}$ (pour $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$), la fissure matricielle est d'abord amorcée puis la longueur de décohesion se propage lorsque la contrainte appliquée σ atteint σ^{ci} .

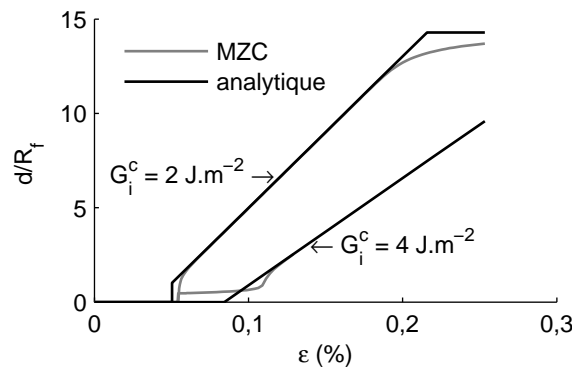


Figure 1.28 – Evolution de la longueur de décohesion d en fonction de la déformation appliquée ε en utilisant l'équation 1.67 et les courbes contrainte/déformation obtenues à l'aide du modèle de zones cohésives et du modèle analytique. Deux énergies de rupture de l'interface G_i^c sont étudiées.

Lorsque $\sigma^c \geq \sigma^{ci}$ (pour $G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$), l'amorçage de la fissure matricielle s'accompagne d'une décohesion interfaciale sur une longueur donnée. Ceci est à l'origine du saut de décohesion à l'amorçage de la fissure matricielle, avant que la décohesion se propage linéairement en fonction de la déformation appliquée. Enfin si le chargement est suffisant pour que la décohesion atteigne toute la longueur de la cellule, on observe la saturation de la décohesion à sa valeur maximale.

Comparaison de la contrainte à l'amorçage obtenue avec l'approche énergétique

La contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale a été exprimée en fonction de l'énergie de rupture de l'interface (1.52). Cette équation est comparée avec la contrainte relevée sur les courbes contrainte/déformation à partir du MZC (figure 1.29) : **l'approche énergétique et le MZC donnent une valeur identique de σ^{ci} .**

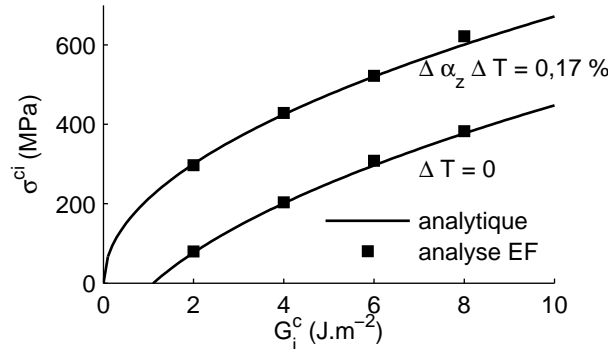


Figure 1.29 – Contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale en fonction de l'énergie de rupture G_i^c . Une comparaison est faite entre l'expression 1.52 et les résultats du MZC. Les contraintes résiduelles sont prises en compte ou non et paramétrées par la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$.

Influence de la fraction volumique de fibres et des contraintes résiduelles sur le chargement à l'amorçage de la décohésion

La contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale a été exprimée en fonction de la fraction volumique de fibre V_f et des contraintes résiduelles (équation 1.52). On observe que **les contraintes résiduelles favorisent aussi la propagation de la décohésion** (figure 1.30a). **La propagation de la décohésion est plus précoce si la section de matrice est plus grande**, à condition que les contraintes résiduelles ne dépassent pas un certain seuil.

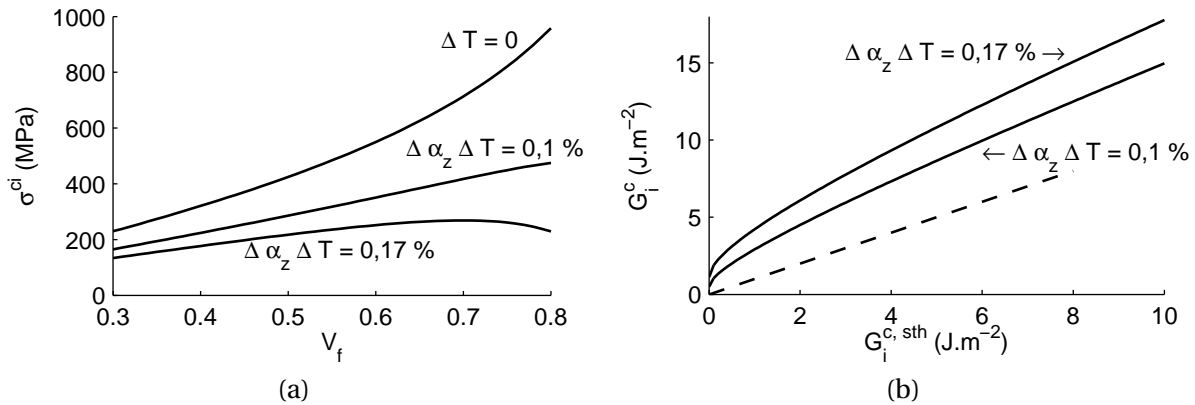


Figure 1.30 – (a) Contrainte σ^{ci} lors de la propagation de la décohésion en fonction de la fraction volumique de fibre V_f et de la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$. L'énergie de rupture utilisé est $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$. (b) Influence des contraintes résiduelles sur l'identification de l'énergie de rupture G_i^c . $G_i^{c,sth}$ correspond à l'énergie de rupture identifiée sans prendre en compte les contraintes résiduelles.

Dans la perspective d'identifier l'énergie de rupture G_i^c à partir d'essais de traction sur microcomposites ou minicomposites, on peut se demander quelle est l'influence de la prise en compte ou non des contraintes résiduelles. On note $G_i^{c,sth}$ l'énergie de rupture évaluée sans prendre en compte les contraintes résiduelles. Dans ce cas $G_i^{c,sth}$ se calcule à partir de la contrainte σ^{ci} en utilisant l'expression (1.52) avec $\sigma^T = 0$.

La figure 1.30b représente l'évolution de l'énergie de rupture G_i^c (évaluée en prenant en compte les contraintes résiduelles) en fonction de $G_i^{c,sth}$. Négliger les contraintes résiduelles dans l'identification entraîne la sous évaluation de l'énergie de rupture. G_i^c peut être au plus 2 fois plus élevé que la valeur $G_i^{c,sth}$ en fonction de l'importance de la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$.

III.3 Analyse de la réponse contrainte/déformation du microcomposite en traction cyclée

On propose de simuler la réponse en traction avec des cycles déchargement/rechargement. Ainsi les propriétés mécaniques du microcomposite endommagé, obtenues analytiquement ou avec le MZC pourront être comparées en fonction de la longueur de décohésion. On s'intéresse en particulier à l'ouverture de la fissure matricielle. Une modélisation sera proposée.

Propriétés élastiques et déformations résiduelles

L'essai de traction est simulé avec le MZC au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion dans la cellule de longueur $L = 100 \mu m$. Des cycles ont été réalisés (figure 1.31). Le module élastique correspond à la pente de la courbe au cours du déchargement/rechargement. Le comportement au cours du déchargement/rechargement est linéaire puisque le glissement à l'interface se produit sans frottement. Lorsque la cellule élémentaire est déchargée ($\sigma = 0$), les déformations résiduelles peuvent être observées.

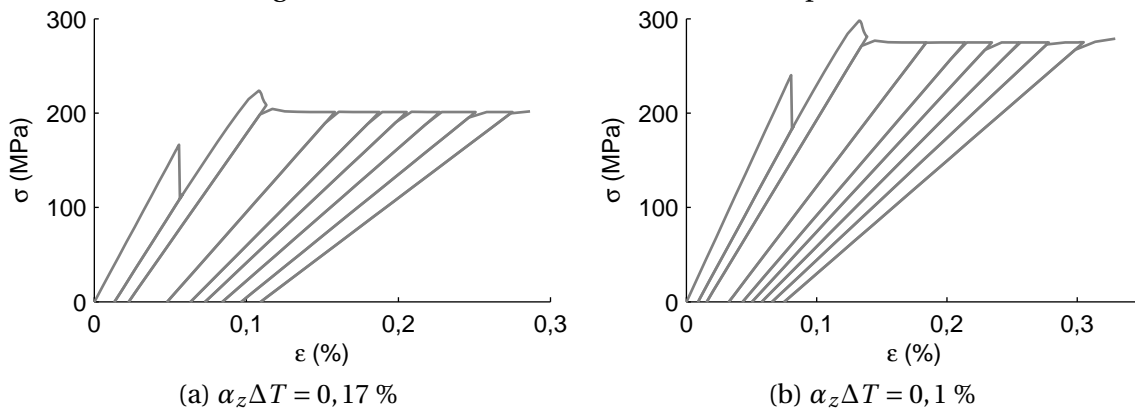


Figure 1.31 – Courbe cyclée contrainte/déformation simulée avec le MZC au cours de l'endommagement en traction : amorçage de la fissure et propagation de la décohésion à l'interface. L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 J.m^{-2}$ et le cisaillement maximal est $\sigma_{max,i} = 300 MPa$. Les contraintes résiduelles sont prises en compte et sont paramétrées par la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$.

Le module longitudinal $E(L, d)$ et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ ont été déterminées à partir de chaque boucle. D'autre part la longueur de décohésion d au cours de l'essai peut se déduire de la courbe contrainte-déformation à l'aide de l'expression 1.67. On peut alors représenter $E(L, d)$ et $\varepsilon_r(L, d)$ en fonction de d (figure 1.32). Par ailleurs ces valeurs ont été comparées aux expressions analytiques du module et des déformations résiduelles écrites à partir du pas de fissuration L et de d (1.33 et 1.39).

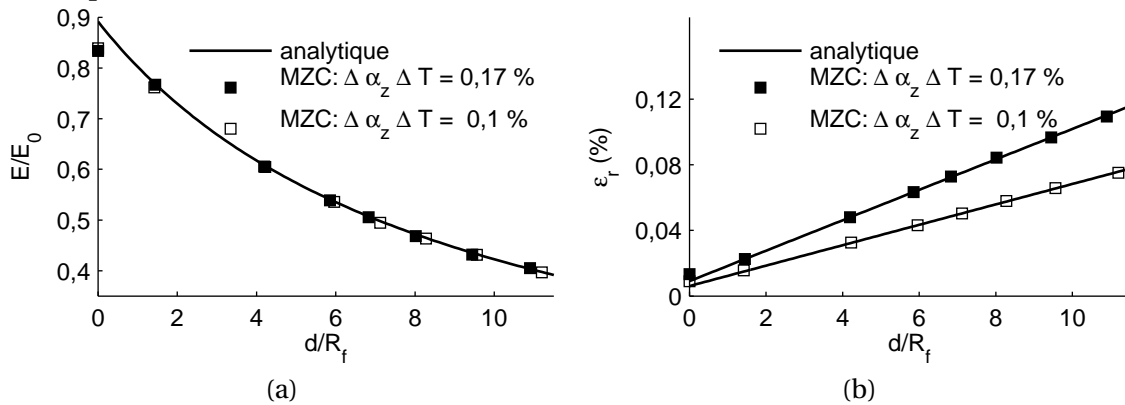


Figure 1.32 – Module élastique (a) et déformations résiduelles (b) évaluées à partir des essais de traction cyclés en fonction de la longueur de décohésion d . Ces valeurs sont comparées aux expressions analytiques du module longitudinal (équation 1.33) et des déformations résiduelles (équation 1.39).

Refermeture des fissures matricielles en compression

Des essais cyclés de traction/compression ont été réalisés pour observer ces refermetures de fissures (figure 1.33). Après la refermeture des fissures en compression, le microcomposite se rigidifie pour retrouver le module du microcomposite sain E_0 .

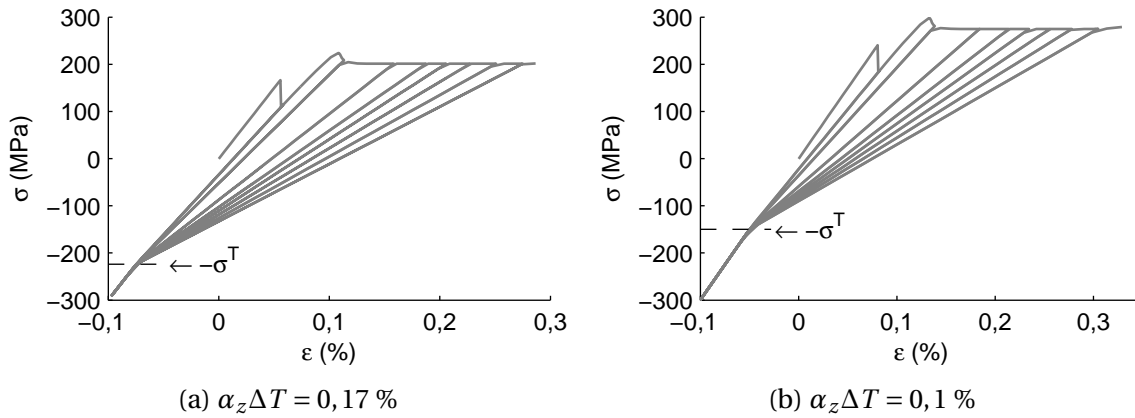


Figure 1.33 – Simulation d'un essai cyclé de traction/compression prenant en compte l'amorçage de la fissure matricielle et la propagation de la décohésion à l'aide des MZC. Les contraintes résiduelles sont prises en compte et paramétrées en fonction de la déformation $\Delta\alpha_z \Delta T$.

Les fissures matricielles sont refermées lorsque la contrainte appliquée σ atteint la contrainte $-\sigma^T$ exprimée précédemment (relation 1.12).

De plus, le comportement au cours du déchargement est linéaire avant la fermeture des fissures et les droites contrainte/déformation sont concourantes au point $(-\varepsilon^T, -\sigma^T)$ tel que

$$\begin{cases} \varepsilon^T &= \Delta\alpha_z^T \Delta T \\ \sigma^T &= E_0 \Delta\alpha_z^T \Delta T \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha_z^T = \Delta\alpha_z \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0}. \quad (1.68)$$

Les coefficients a_1 et a_2 sont décrits par (1.11) et (1.9). La mise en évidence de ce point de concours permet d'évaluer les contraintes résiduelles dans la direction axiale à partir des essais de traction cyclés expérimentaux.

Estimation des ouvertures de fissures matricielles

Les ouvertures de fissures peuvent être déterminées à l'aide des simulations du microcomposite avec le MZC. Cette étude a déjà été réalisée lors de l'analyse de la fissuration matricielle (sans décohésion). Une approximation a été proposée pour évaluer l'ouverture de fissure en fonction du chargement appliqué. On souhaite maintenant comprendre l'influence de la décohésion et exprimer l'ouverture de fissure.

D'abord l'évolution de la longueur de décohésion au cours de l'essai de traction cyclée peut être déterminée à partir des courbes contrainte déformation (figure 1.33) et de la relation (1.67). L'amorçage de la fissure matricielle est simulée dans la cellule de taille $L = 100 \mu m$ en prenant en compte la propagation de la décohésion. La décohésion reste constante pendant les cycles déchargement rechargement (figure 1.34).

Les calculs de l'ouverture de fissure ont été réalisés à partir de la simulation du microcomposite au cours de l'essai de traction/compression cyclé à l'aide du MZC (figure 1.35a). Ces mesures sont réalisées sur la surface extérieure de la matrice.

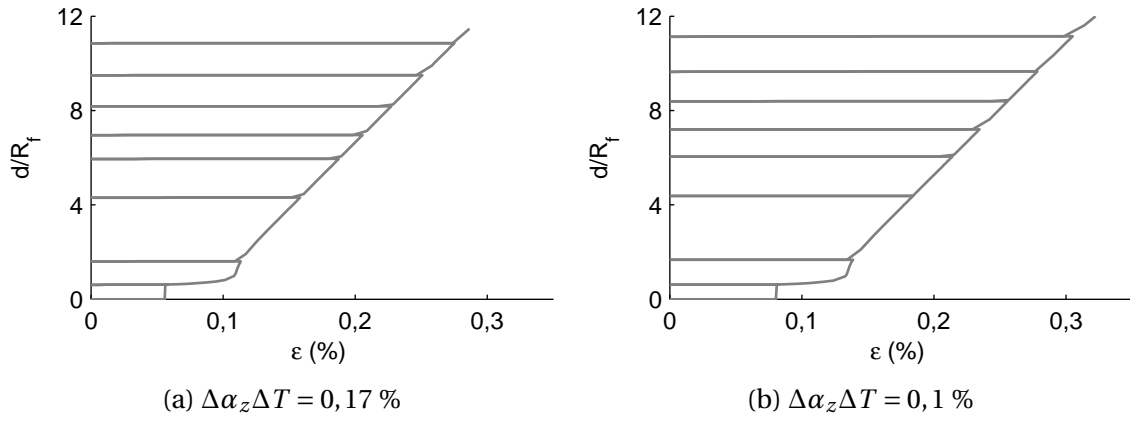


Figure 1.34 – Longueur de décohesion d en fonction de la déformation appliquée ε au cours de l'essai de traction cyclée. Deux valeurs des contraintes résiduelles ont été étudiées et elles sont paramétrées par la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$. L'énergie de rupture de l'interface vaut $G_i^c = 4 J.m^{-2}$.

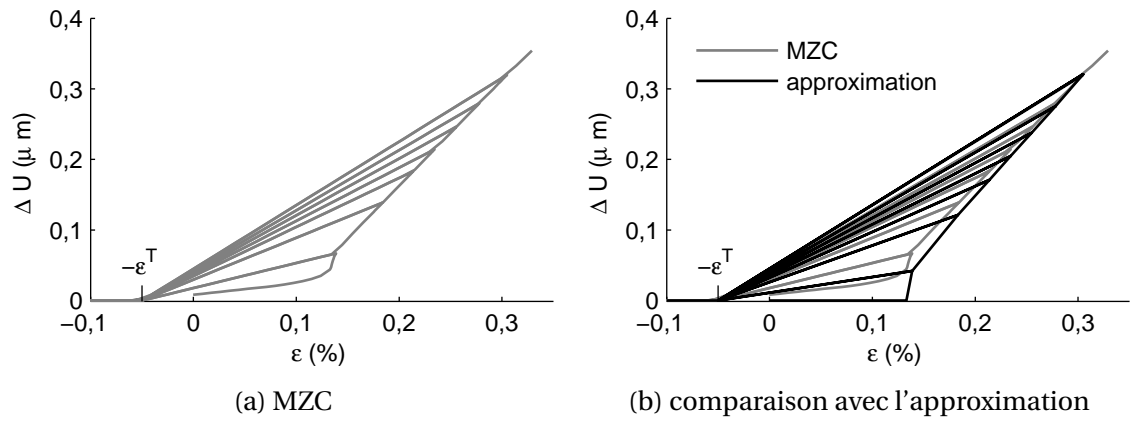


Figure 1.35 – Ouvertures de fissure ΔU évaluées en fonction de la déformation appliquée ε près de la surface extérieure de la matrice. Les mesures sont réalisées à partir de la simulation du microcomposite en traction avec le MZC (a). Une première expression a été proposée (équation 1.74) pour approcher l'ouverture de fissure (b). Les contraintes résiduelles sont prises en compte telles que la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T = 0,1 \%$. L'énergie de rupture est $G_i^c = 4 J.m^{-2}$.

La décohesion interfaciale entraîne un accroissement de l'ouverture de la fissure. Trois points sont à observer :

1. L'ouverture de fissure est croissante avec la déformation appliquée ε et avec la longueur de décohesion $d(\varepsilon)$.
2. Puis au cours du déchargement et du rechargement, la longueur de décohesion n'évolue plus et l'ouverture de la fissure est linéaire en fonction du chargement jusqu'à ce que la fissure soit entièrement refermée.
3. La fissure est fermée lorsque la déformation appliquée atteint $-\varepsilon^T$.

A partir de cette analyse, on souhaite modéliser l'ouverture de fissure ΔU en fonction du chargement de traction et de la longueur de décohesion d . En reprenant l'expression (1.32) de l'ouverture de fissure matricielle sans décohesion, on propose de modéliser ΔU par l'équation

$$\Delta U(\sigma, d) = R_f \frac{\langle \sigma + \sigma^T \rangle}{E_0} K(d) \quad \text{avec} \quad \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (1.69)$$

où $K(d)$ est un coefficient croissant en fonction de la longueur de décohesion. $K(d)$ est à déterminer en fonction des caractéristiques du microcomposite.

L'ouverture ΔU peut aussi s'écrire en fonction de la déformation appliquée ε pour pouvoir comparer cette expression avec la [figure 1.35a](#). En utilisant les relations $\sigma = (\varepsilon - \varepsilon_r(L, d)) E(L, d)$ et $\sigma^T = E_0 \varepsilon^T$ on obtient

$$\sigma + \sigma^T = (\varepsilon - \varepsilon_r(L, d)) E(L, d) + E_0 \varepsilon^T, \quad (1.70)$$

puis en utilisant toujours les expressions de $E(L, d)$ ([1.33](#)) et de $\varepsilon_r(L, d)$ ([1.39](#)) cette relation devient

$$\sigma + \sigma^T = \varepsilon E(L, d) - \Delta \alpha_z^T \Delta T D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \frac{E_0}{1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L}} + E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T. \quad (1.71)$$

Cette équation se simplifie avec

$$\sigma + \sigma^T = \varepsilon E(L, d) + \Delta \alpha_z^T \Delta T \frac{E_0}{1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L}} \quad \text{soit} \quad \sigma + \sigma^T = E(L, d) (\varepsilon + \varepsilon^T). \quad (1.72)$$

L'expression proposée permet alors d'estimer l'ouverture de fissure ΔU en fonction de la déformation appliquée ε par l'équation

$$\Delta U(\varepsilon, d) = R_f \frac{E(L, d)}{E_0} \langle \varepsilon + \varepsilon^T \rangle K(d). \quad (1.73)$$

Le coefficient $K(d)$ est déterminé par comparaison de cette expression ([1.73](#)) avec les valeurs de ΔU obtenues avec le MZC. Une **première approximation de $K(d)$** est proposée à partir du module longitudinal E_{sat} ([1.36](#)) du microcomposite présentant une décohésion sur toute sa longueur. Cette approximation est donnée par

$$K(d) \approx \frac{E_0}{E_{sat}} \frac{d}{R_f} \quad \text{soit} \quad \Delta U(\sigma, d) \approx \frac{\langle \sigma + \sigma^T \rangle}{E_{sat}} \frac{d}{R_f} \quad \text{avec} \quad E_{sat} = \frac{E_0}{1 + 4V_f \frac{E_0}{E_m} c_1^2}. \quad (1.74)$$

Cette approximation ([1.74](#)) permet d'estimer correctement l'ouverture de la fissure lorsque la longueur de décohésion est grande, mais conduit à une sous-évaluation si la longueur de décohésion est inférieure à $10R_f$ ([figure 1.35b](#)).

On propose alors d'apporter une correction. La valeur du coefficient $K(d)$ peut être déterminée par

$$K(d) = \frac{E_0}{E_{sat}} \frac{d}{R_f} + K_a \left(\frac{d}{R_f} - K_b \right). \quad (1.75)$$

Les deux coefficients $K_a < 0$ et $K_b > 0$ sont déterminés directement en traçant la relation $K(d) - \frac{E_0}{E_{sat}} \frac{d}{R_f}$ en fonction de d . Pour les caractéristiques du microcomposite étudié, les coefficients K_a et K_b ont été identifiés

$$K_a = -0,262 \quad \text{et} \quad K_b = 11,43. \quad (1.76)$$

Comme le montre la [figure 1.36](#), cette nouvelle expression de $K(d)$ fournit une meilleure estimation de l'ouverture de fissure matricielle.

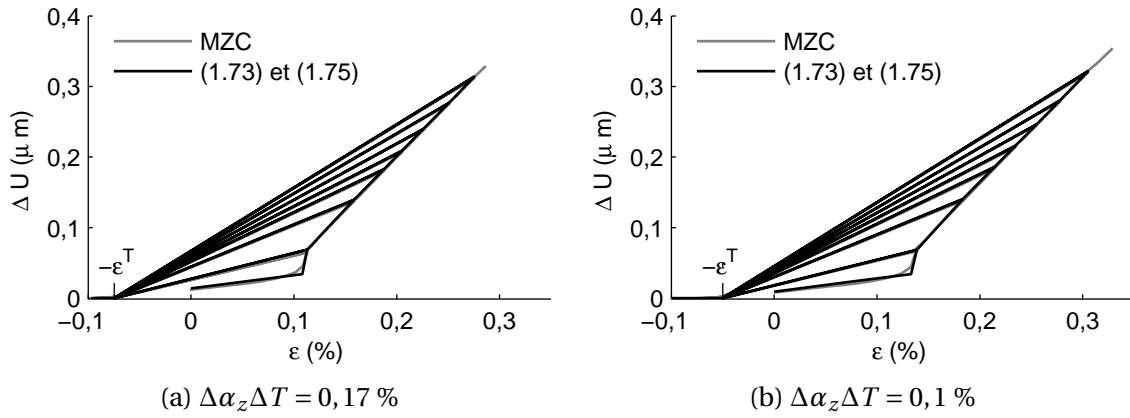


Figure 1.36 – Ouvertures de fissure ΔU évaluées par le MZC en fonction de la déformation appliquée σ . Deux valeurs des contraintes résiduelles ont été étudiées et elles sont paramétrées par la déformation $\Delta\alpha_z\Delta T$. Ces valeurs de l'ouverture de fissure sont comparées au modèle proposé (équation 1.77).

En résumé, les relations proposées pour obtenir l'ouverture de fissure ΔU s'expriment par

$$\Delta U(\sigma, d) = R_f \frac{\langle \sigma + \sigma^T \rangle}{E_0} K(d) \quad \text{avec} \quad K(d) = \frac{E_0}{E_{sat}} \frac{d}{R_f} + K_a \left(\frac{d}{R_f} - K_b \right), \quad (1.77)$$

ou

$$\Delta U(\varepsilon, d) = R_f \frac{E(L, d)}{E_0} \langle \varepsilon + \varepsilon^T \rangle K(d)$$

où les deux coefficients $K_a < 0$ et $K_b > 0$ doivent être identifiés et dépendent des caractéristiques du microcomposite étudié.

III.4 Propagation de la décohésion sans frottement : bilan

Les éléments nécessaires à la modélisation du comportement au cours de la traction et de la propagation de la décohésion interfaciale ont été analysés :

1. Le module longitudinal $E(L, d)$ et le coefficient de dilatation thermique $\alpha(L, d)$ ont été exprimés en fonction du pas de fissuration L , de la longueur de décohésion d , des caractéristiques du microcomposite et du coefficient D_1^0 .
2. Le taux de restitution d'énergie au cours de la propagation de la décohésion a été déterminé. L'approche énergétique a permis d'exprimer la contrainte σ^{ci} qui entraîne la propagation de la décohésion en fonction de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Cette expression confirme la relation de [Hutchinson et Jensen, 1990].

Un modèle de zones cohésives a été mis en œuvre pour simuler la propagation de la décohésion. La courbe contrainte/déformation au cours de l'essai de traction est identique avec le modèle analytique proposé.

3. Des essais de traction cyclés ont été simulés pour étudier la refermeture des fissures et l'évolution de l'ouverture des fissures. Ces propriétés ont été exprimées à l'aide de relations analytiques. Les contraintes résiduelles favorisent la propagation de la décohésion et accroissent l'amplitude des déformations résiduelles.

A ce stade le modèle développé permet de simuler le microcomposite soumis à un chargement en traction en prenant en compte la fissuration de la matrice et la décohésion interfaciale. Le frottement dans la zone de glissement n'a pas été encore pris en compte. Ceci entraîne la propagation de la décohésion pour une contrainte appliquée $\sigma = \sigma^{ci}$ constante.

Conclusion

A cours de ce chapitre les mécanismes d'amorçage de la fissuration matricielle et de propagation de la décohésion interfaciale ont été analysés et décrits. Une cellule élémentaire du microcomposite en traction a été considérée. **Pour cette étude, le frottement à l'interface fibre/matrice n'a pas été pris en compte.**

L'objectif était d'exprimer les propriétés nécessaires pour la modélisation du comportement en traction et de la fissuration, tels que :

- le chargement de traction qui permet d'amorcer la fissure matricielle,
- l'évolution de la longueur de décohésion au cours de la traction,
- le module longitudinal et les déformations résiduelles du minicomposite contenant la fissure matricielle et la décohésion interfaciale.

La réponse contrainte/déformation du minicomposite en traction a été analysée ainsi que l'évolution de l'ouverture de fissure matricielle. Les contraintes résiduelles sont prises en compte.

Modèle semi-analytique

Plusieurs approches, modèles et outils ont été utilisés pour exprimer les propriétés énoncées :

- Certains modèles de la littérature ont été employés. Ils ont permis d'exprimer les contraintes au sein du minicomposite sain et contenant les fissures : contraintes résiduelles, module longitudinal et déformations résiduelles. On a choisit de reprendre les coefficients formulés par [Hutchinson et Jensen, 1990] pour simplifier les relations (tableau 1.4). Ces coefficients s'écrivent en fonction des propriétés matériaux et des caractéristiques du minicomposite.
- La répartition des contraintes au sein du minicomposite fissuré a aussi été calculée par Eléments Finis, de même que le module longitudinal, les contraintes et les déformations résiduelles.

Les modèles analytiques ont des capacités limités pour décrire la répartition des contraintes au voisinage de la fissure matricielle. La perte de rigidité liée à l'amorçage de la fissure matricielle dépend alors d'un coefficient noté D_1^0 , qui est calculé par EF (tableau 1.4).

- La propagation de la décohésion qui accompagne la fissure matricielle a été décrite par la mécanique de la rupture. Le taux de restitution d'énergie a été exprimé, sans prendre en compte le frottement interfacial. Un critère de propagation de la décohésion en a été déduit.

Le modèle obtenu est alors qualifié de **modèle semi-analytique** puisqu'il est construit par des expressions dépendant à la fois des propriétés des matériaux et du coefficient D_1^0 déterminé par calculs EF.

Caractéristiques du microcomposite	
Propriétés mécaniques $\mathcal{P} = \{E_f, E_m, \nu_f, \nu_m, R_f, V_f\}$	Contraintes résiduelles $\mathcal{T} = \{\alpha_z^f, \alpha_z^m, \alpha_r^f, \alpha_r^m, \Delta T\}$
Coefficients de [Hutchinson et Jensen, 1990]	
$a_1(\mathcal{P}), a_2(\mathcal{P}, \mathcal{T}), c_1(\mathcal{P})$	
Coefficient identifié par analyse EF	
$D_1^0(\mathcal{P})$ perte de rigidité liée à la fissuration matricielle	

Tableau 1.4 – Coefficients utilisés dans les équations du modèle semi-analytique.

Modèle de zones cohésives

Un modèle de zones cohésives (MZC) a également été développé et mis en œuvre. L'amorçage et la propagation de fissures à l'aide de MZC est régie par plusieurs paramètres. Une étude préalable a été réalisée pour déterminer les valeurs appropriées de ces paramètres. Cette approche numérique apporte un second modèle de fissuration du minicomposite en traction et d'évolution de la fissuration. Les résultats obtenus sont identiques au modèle semi-analytique développé.

Fissuration matricielle

On propose ici de résumer les principales équations du modèle semi-analytique.

L'amorçage de la fissure matricielle est pilotée par la contrainte à rupture de la matrice, notée σ_{max} . La contrainte axiale σ^c appliquée sur le minicomposite lors de l'amorçage de la fissure matricielle est obtenue par la relation

$$\sigma^c = \sigma_{max} \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} - \sigma^T \quad \text{avec} \quad \sigma^T = E_0 \left(\alpha_z^f - \alpha_z^m \right) \frac{a_2 V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{E_m}{E_0} \Delta T. \quad (1.78)$$

La contrainte résiduelle notée σ^T s'exprime en fonction de la variation de température après l'élaboration, notée ΔT .

On considère un minicomposite contenant les fissures matricielles. Soit L le pas de fissuration matricielle. Le module longitudinal $E(L)$ et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L)$ du minicomposite endommagé s'écrivent

$$E(L) = \frac{E_0}{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_r(L) = \frac{\sigma^T}{E_0} D_1^0 \frac{R_f}{L}. \quad (1.79)$$

Le modèle semi-analytique proposé nécessite d'identifier le coefficient D_1^0 à l'aide de calculs EF. Une procédure automatique a été réalisée à cet effet. Cette procédure a pour but de déterminer le **coefficient** D_1^0 en fonction des caractéristiques du microcomposite. Ce coefficient sans dimension représente l'augmentation de complaisance liée à la fissure matricielle. D_1^0 intervient dans l'expression du module longitudinal et des déformations résiduelles. Pour déterminer ce coefficient, plusieurs valeurs du module sont calculées par EF en fonction du pas de fissuration L .

L'influence de la répartition des fissures matricielles au sein du minicomposite a été discuté. Tant que les fissures matricielles sont suffisamment espacées, les propriétés élastiques

sont équivalentes à celles du minicomposite dont les fissures sont réparties de manière périodique. Le pas de fissuration L est un pas de fissuration moyen.

Ceci n'est plus vrai si les fissures sont rapprochées avec une distance inférieure à $6R_f$ (environ $40 \mu m$).

Décohésion interfaciale

Une fois la fissure matricielle créée, la propagation de la décohésion interfaciale est gouvernée par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Le taux de restitution d'énergie au cours de la propagation de la décohésion a été exprimé pour en déduire la contrainte σ^{ci} à l'origine de la propagation de la décohésion

$$\sigma^{ci} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T. \quad (1.80)$$

La contrainte σ^{ci} lors du début de la propagation de la décohésion est identique à celle déterminée par le modèle de zones cohésives.

La décohésion se propage avec le chargement de traction. La longueur de la décohésion interfaciale est notée d . On a montré qu'en l'absence de frottement à l'interface, la décohésion se propage sur toute la longueur du minicomposite lorsque la contrainte axiale atteint σ^{ci} . Le comportement en traction présente alors une courbe "plate" dès le début de la propagation de la décohésion.

La déformation axiale s'accroît avec la longueur de décohésion. Le module élastique $E(L, d)$ et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} E(L, d) = \frac{E_0}{1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L}} \\ \text{et} \\ \varepsilon_r(L, d) = \frac{\sigma^T}{E_0} D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad D_1(L, d) = D_1^0 \left(1 - \frac{d}{L} \right) + 4V_f \frac{E_0}{E_m} \frac{d}{R_f} c_1^2. \quad (1.81)$$

L'ouverture de la fissure matricielle ΔU est aussi déterminée à partir des simulations EF.

Minicomposite sain et minicomposite saturé

Le module élastique du minicomposite sain, c'est à dire avant l'amorçage de la fissure matricielle, s'exprime par la loi des mélanges avec

$$E_0 = V_f E_f + (1 - V_f) E_m. \quad (1.82)$$

On obtient la saturation de l'endommagement lorsque la matrice est totalement déchargée tout le long du minicomposite. C'est le cas lorsque la décohésion interfaciale s'est propagée sur toute la longueur du minicomposite. Dans ce cas, le module élastique du minicomposite "saturé" s'écrit

$$E_{sat} = \frac{E_0}{1 + 4V_f \frac{E_0}{E_m} c_1^2}. \quad (1.83)$$

Refermeture de la fissure matricielle

Parmi les expressions précédentes, les contraintes résiduelles sont prises en compte par la contrainte σ^T déjà exprimée.

On a montré que la contrainte axiale en compression σ^T est la contrainte qui permet de refermer les fissures matricielles. Ce point de refermeture des fissures est indépendant de l'état d'endommagement donné par L ou d . La contrainte σ^T dépend juste des propriétés mécaniques et des caractéristiques du minicomposite.

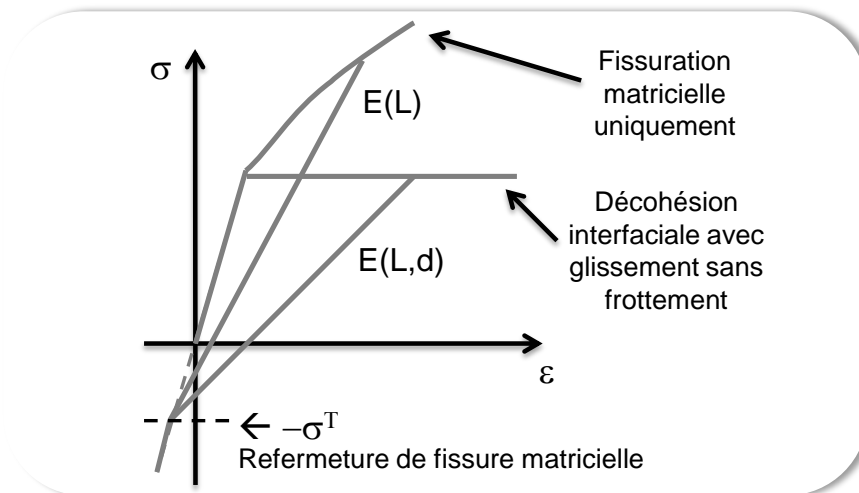


Figure 1.37 – Comportement en traction/compression du minicomposite sans frottement interfacial.

Etant donné que le frottement interfacial n'est pas pris en compte, le comportement lors du déchargement du minicomposite endommagé est linéaire (figure 1.37). Les droites obtenues lors du déchargement sont toutes concourantes en un point unique, donné par la contrainte $-\sigma^T$ et la déformation $-\frac{\sigma^T}{E_0}$.

Pour des efforts de compression axiale supérieurs à σ^T , le minicomposite se comporte comme le minicomposite sain, avec un module longitudinal E_0 . Le modèle de zones cohésives reproduit exactement ce comportement.

Bibliographie

- ALFANO, G. et G. M. A. CRISFIELD. 2001, «Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational numbers», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 50, n° 7, p. 1701–1736. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.93>.
- ALFANO, G. et E. SACCO. 2006, «Combining interfacial damage and friction in a cohesive-zone model», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 68, n° 5, p. 542–582. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1728>.
- BARENBLATT, G. I. 1962, «The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture», *Adv. Appl. Mech.*, vol. 7, p. 55–129. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0065-2156\(08\)70121-2](http://dx.doi.org/10.1016/s0065-2156(08)70121-2).
- CASTELIER, E., L. GÉLÉBART, L. C. et C. LANTUÉJOUL. 2010, «Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites», *Composites Science and Technology*, vol. 70, n° 15, p. 2146–2153. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.08.014>.
- CHABOCHE, J.-L., R. GIRARD et A. SCHAFF. 1997, «Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models», *Computational Mechanics*, vol. 20, n° 1-2, p. 3–11. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s004660050209>.
- DUGDALE, D. S. 1960, «Yielding of steel sheets containing slits», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 8, n° 2, p. 100–104. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).
- FRANCFORT, G. A. et J.-J. MARIGO. 1998, «Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 8, p. 1319–1342. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096\(98\)00034-9](http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096(98)00034-9).
- GRIFFITH, A. A. 1920, «The phenomenon of rupture and flows in solids», *Philosophical Transaction of the Royal Society (London)*, vol. A221, n° 582-593, p. 163–198. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>.
- HASHIN, Z. 1996, «Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 44, n° 7, p. 1129–1145. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096\(95\)00080-1](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00080-1).
- HUTCHINSON, J. W. et H. M. JENSEN. 1990, «Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction», *Mechanics of Materials*, vol. 9, n° 2, p. 139–163. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90037-g](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(90)90037-g).
- IRWIN, G. R. 1957, «Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 79, p. 361–364.
- LEGUILLON, D., C. LACROIX et E. MARTIN. 2000, «Interface debonding ahead of a primary crack», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n° 10, p. 2137–2161. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096\(99\)00101-5](http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096(99)00101-5).
- LI, J. 2000, «Debonding of the interface as 'crack arrestor'», *Int. J. Fract.*, vol. 105, p. 37–59.
- LISSART, N. 1994, *Probabilité de rupture et fiabilité des composites à matrice céramique*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I. URL <http://www.theses.fr/1994B0R10651>.

- LU, T. J. et J. W. HUTCHINSON. 1995, «Effect of matrix cracking and interface sliding on the thermal expansion of fibre-reinforced composites», *Composites*, vol. 26, n° 6, p. 403–414. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4361\(95\)90913-k](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4361(95)90913-k).
- MARTIN, E., D. LEGUILLON et C. LACROIX. 2001, «A revisited criterion for crack deflection at an interface in a brittle bimaterial», *Composites Science and Technology*, vol. 61, n° 12, p. 1671–1679. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538\(01\)00067-7](http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538(01)00067-7).
- MONERIE, Y. 2000, *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre-matrice*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2000AIX22054>.
- PRECHTEL, M., P. LEIVA RONDA, R. JANISCH, A. HARTMAIER, G. LEUGERING, P. STEINMANN et M. STINGL. 2011, «Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive zone models», *Int. J. Fract.*, vol. 168, n° 1, p. 13–29. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10704-010-9552-z>.
- SUN, C. T. et W. QIAN. 1998, «A treatment of interfacial cracks in the presence of friction», *Int. J. Fracture*, vol. 94, p. 371–382. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-4489-6_9.
- TOMAR, V., J. ZHAI et M. ZHOU. 2004, «Bounds for element size in a variable stiffness cohesive finite element model», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 61, n° 11, p. 1894–1920. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1138>.
- TURON, A., C. DÁVILA, P. CAMANHO et J. COSTA. 2007, «An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models», *Eng. Fract. Mech.*, vol. 74, n° 10, p. 1665–1682. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.08.025>.
- TVERGAARD, V. 1990, «Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal», *Materials Science and Engng A*, vol. 125, n° 2, p. 203–213. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093\(90\)90170-8](http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093(90)90170-8).
- VILLENEUVE, J. F. 1991, *Etude de la dilatation thermique et du comportement thermomécanique en traction et torsion de quelques fibres céramiques monofilamentaires*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

Chapitre 2

Modélisation de l'endommagement d'un minicomposite "idéal" : décohésion interfaciale avec glissement frottant

Sommaire

Introduction	75
I Eléments de bibliographie	75
II Modèle de zones cohésives pour la propagation de la décohésion avec frottement	79
II.1 Modification du Modèle de Zones Cohésives pour le glissement frottant	79
II.2 Influence du glissement frottant sur la réponse en traction monotone	82
III Modèle semi-analytique du minicomposite en traction lors de la propagation de la décohésion avec frottement	83
III.1 Modèle analytique de la propagation de la décohésion interfaciale	84
Energie de rupture de l'interface et saut de contrainte en pointe de décohésion	84
Expression de la longueur de décohésion	84
Expression de la déformation axiale	85
III.2 Correction pour la redistribution des contraintes au droit de la décohésion	86
Comportement en traction avec le modèle semi-analytique	89
III.3 Comparaison avec le modèle de zones cohésives	89
IV Longueur de décohésion au cours de la traction monotone	91
IV.1 Comparaison avec le modèle de rechargement linéaire	92
Comparaison du comportement en traction	93
IV.2 Influence de l'énergie de rupture de l'interface	94
IV.3 Influence du type de conditions aux limites	95
IV.4 Influence des coefficients de Poisson	96

V	Ouverture de fissure au cours de la traction monotone	97
V.1	Expression semi-analytique	97
V.2	Comparaison avec le Modèle de Zones Cohésives	98
VI	Traction cyclée, modélisation des boucles d'hystérésis	99
VI.1	Méthode Eléments Finis pour la modélisation des boucles	99
VI.2	Caractérisation du module tangent :	
	Relations avec l'endommagement et le frottement	100
	Longueur de glissement	100
	Module en début et fin de déchargement et de rechargement	101
VI.3	Loi d'évolution du module tangent et des boucles d'hystérésis	103
	Module tangent	103
	Modèle de comportement du minicomposite au cours de la boucle	103
VI.4	Bilan	104
	Module tangent, forme des boucles, frottement	104
	Module élastique et déformations résiduelles apparentes	106
	Conclusion	107
	Bibliographie	109

Introduction

Les minicomposites sont caractérisés par une interface frottante qui modifie la répartition des contraintes et l'évolution de la décohésion. **Le développement de la décohésion interfaciale au sein du minicomposite en traction, avec la prise en compte du glissement frottant à l'interface fibre/matrice**, fait l'objet de ce chapitre. La liaison interfaciale est paramétrée par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et par le coefficient de frottement μ .

On souhaite modéliser l'évolution de la longueur de décohésion au cours du chargement en traction ainsi que la réponse mécanique en traction. Les données d'entrée sont les caractéristiques du minicomposite ainsi que les propriétés des fibres, de la matrice et de l'interface.

Au cours de ce chapitre, les points analysés sont les suivants :

- Des éléments de bibliographie sont recensés qui concernent la décohésion interfaciale avec glissement frottant. Les modèles présentés se différencient par la description des contraintes au voisinage de la décohésion interfaciale.
- D'une part, un modèle semi-analytique du minicomposite en traction est développé pour simuler l'évolution de la longueur de décohésion. La déformation axiale est exprimée à partir de la longueur de décohésion. Les hypothèses de ce modèle sont positionnées par rapport aux modèles existants.
- D'autre part, le modèle de zones cohésives (MZC) développé au cours du chapitre précédent est enrichi pour prendre en compte le glissement frottant. Le MZC trouve tout son intérêt dans la modélisation des mécanismes difficiles à analyser analytiquement tels que la propagation de la décohésion avec frottement. Les résultats de ce modèle de référence sont comparés à ceux du modèle semi-analytique.
- Les ouvertures de fissures matricielles dépendent du chargement en traction, de la longueur de décohésion et du frottement à l'interface. Elles ont aussi été exprimées analytiquement et les valeurs obtenues sont comparées aux résultats du MZC.
- Enfin, le comportement mécanique du minicomposite soumis à une traction cyclée est analysé. Le frottement à l'interface est responsable des boucles d'hystérésis au cours des cycles de déchargement et de rechargement. Des calculs EF sont réalisés pour simuler des boucles d'hystérésis. La forme des boucles dépend de la longueur de décohésion et de l'intensité du frottement.

I Éléments de bibliographie

La prise en compte du frottement lors de la décohésion interfaciale fait d'abord l'objet d'une analyse bibliographique. La présence de la fissure matricielle entraîne localement un déchargement de la matrice et le report des efforts sur la fibre (figure 1.2b). La décohésion interfaciale conduit à une longueur de rechargement plus importante. Le champ de contraintes n'est cependant plus perturbé au delà de cette distance de rechargement. En l'absence de frottement à l'interface, la matrice se décharge complètement au voisinage de la fissure matricielle (figure 1.24). Dans cette zone de rechargement, l'évolution de la contrainte axiale de la fibre et de la matrice dépend du glissement frottant.

La résolution exacte du problème de transfert de charge entre fibre et matrice au voisinage d'une fissure matricielle ou d'une fibre rompue, dans le cadre de l'élasticité linéaire pour une interface parfaite, est d'une grande complexité [Smith et Spencer, 1970]. Les modèles de type "shear-lag" sont très souvent utilisés pour obtenir une approximation unidimensionnelle de la solution [Cox, 1952]. Les travaux de [Nairn, 1997] explicitent clairement les hypothèses d'un modèle de type shear-lag qui peut être étendu à la situation d'une interface frottante.

Une **modélisation unidirectionnelle et linéaire de la contrainte dans la fibre et dans la matrice le long de la longueur de rechargement d_r** est largement utilisée par de nombreux auteurs [Guillaumat, 1994], [Lissart et Lamon], [Curtin et Ahn, 1997], [Lebrun, 1996], [Hui et al., 1997], [Castelier et al., 2010]. Le transfert de charge le long de la distance de rechargement d_r est contrôlé par la contrainte de cisaillement à l'interface τ avec

$$d_r = \frac{R_f}{\tau} \left[\sigma_z^{f,max} - \sigma_z^{f,min} \right], \quad (2.1)$$

où $\sigma_z^{f,max}$ représente la contrainte axiale maximale supportée par la fibre dans la zone endommagée et $\sigma_z^{f,min}$ la contrainte minimale supportée par la fibre dans la zone saine (figure 2.1).

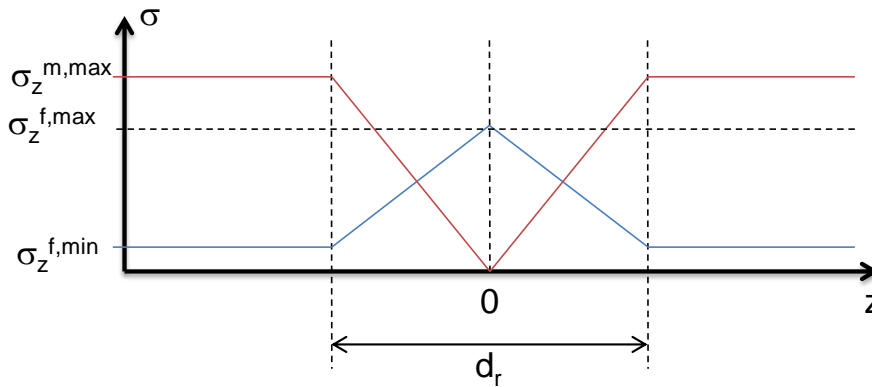


Figure 2.1 – Modélisation linéaire du transfert de charge axial entre la fibre et la matrice le long du microcomposite z (relation 2.1). Les contraintes dans la fibre et dans la matrice retrouvent les valeurs $\sigma_z^{m,max}$ et $\sigma_z^{f,min}$ au delà de la distance de rechargement d_r .

Ces modèles micromécaniques fondés sur un profil de rechargement linéaire à partir de τ reposent sur plusieurs hypothèses :

1. Le **cisaillement interfacial τ** est constant dans toute la zone de glissement quelque soit le chargement appliqué. τ est considéré comme un paramètre caractéristique qui pilote le transfert de charge suivant la relation 2.1. Il est supposé que les contraintes axiales dans la fibre et la matrice sont homogènes dans toute la section considérée avec $\sigma_z^f(r, z) = \sigma_z^f(z)$ et $\sigma_z^m(r, z) = \sigma_z^m(z)$. L'effet Poisson qui provoque la contraction latérale de la fibre est donc négligé.
2. Les contraintes supportées par la fibre $\sigma_z^{f,max}$ et $\sigma_z^{f,min}$ dépendent de la contrainte appliquée σ . Il est alors possible de déterminer l'évolution de la longueur de rechargement d_r en fonction de σ à partir de la relation 2.1. La finalité de ce modèle est d'évaluer **la longueur de décohésion qui est supposée identique à la distance de rechargement soit $d \approx d_r$** . Ce modèle aboutit à une évolution de la longueur de décohésion linéaire en fonction du chargement appliqué σ .
3. L'intensité de la liaison fibre / matrice n'est pas prise en compte. Ce modèle peut être utilisé pour des interfaces dont l'énergie de rupture est très faible ou nulle.

Des procédures ont été développées pour identifier la contrainte de cisaillement caractéristique τ à partir d'essais micromécaniques de type push-out, ou de la courbe de la réponse en traction (modèle ACK [Aveston, Copper et Kelly, 1971], [Marshall, Cox et Evans, 1985], modèle LRE [Lamon, Rebillat et Evans]). On remarque cependant que chaque géométrie d'essais conduit le plus souvent à des valeurs de τ différentes [Kim et Mai, 1998]. Le cisaillement interfacial ne peut être considéré comme une grandeur intrinsèque caractéristique de la liaison interfaciale.

C'est pourquoi il est préférable de déterminer l'énergie de rupture G_i^c de l'interface fibre/matrice. L'analyse de la décohésion interfaciale à l'aide de la mécanique de la rupture a déjà été présentée précédemment (section III.1, page 50). Elle permet d'exprimer la contrainte de décohésion σ^{ci} en fonction de G_i^c (relation 1.52). Cette expression de σ^{ci} est identique à celle de [Hutchinson et Jensen, 1990]. Leur analyse met également en présence un **saut de contrainte axiale γ dans la fibre, localisé en fond de décohésion** [Marshall, 1992] (figure 2.2).

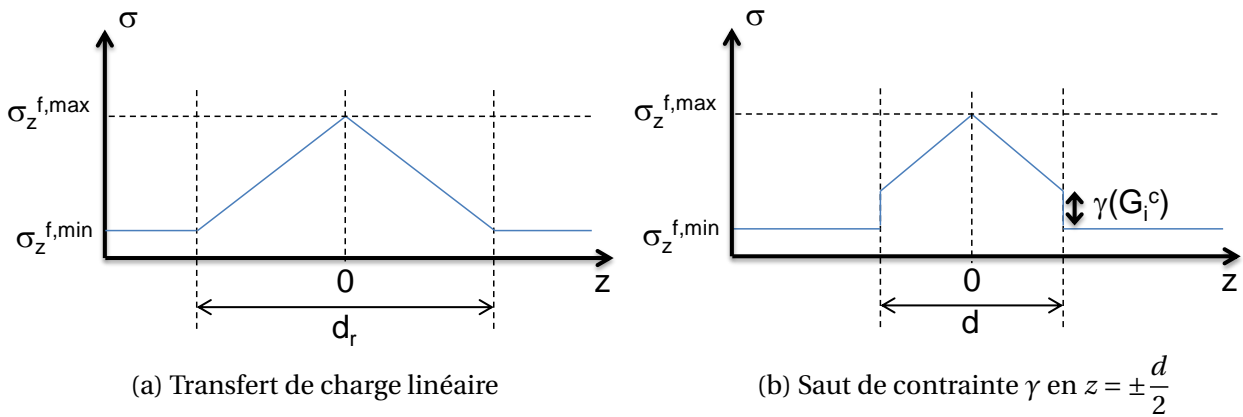


Figure 2.2 – Contrainte axiale dans la fibre au voisinage de la fissure matricielle. d correspond à la longueur de décohésion et la longueur de rechargement est notée d_r . Au delà de la zone de rechargement, la contrainte supportée par la fibre retrouve la valeur $\sigma_z^{f,min}$. $\sigma_z^{f,max}$ est la contrainte subie par la fibre au niveau de la fissure matricielle. (a) Profil de rechargement obtenu par le modèle linéaire piloté par le cisaillement caractéristique τ (équation 2.1). (b) Profil de rechargement déterminé par [Hutchinson et Jensen, 1990] et [Marshall, 1992].

Ce saut de contrainte γ est exprimé en fonction de G_i^c par

$$\gamma = \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^{ci, \Delta T=0} \quad \text{avec} \quad \sigma^{ci, \Delta T=0} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

où $\sigma^{ci, \Delta T=0}$ représente la contrainte appliquée σ^{ci} (équation 1.52) qui permet de propager la décohésion en l'absence des contraintes résiduelles ($\sigma^T = 0$).

En prenant en compte le transfert de charge linéaire piloté par le cisaillement caractéristique τ , le profil de rechargement de la contrainte supportée par la fibre peut être représenté par la figure 2.2b et la longueur de décohésion d est déterminée par

$$d = \frac{R_f}{\tau} \left[\sigma_z^{f,max} - \left(\sigma_z^{f,min} + \gamma \right) \right]. \quad (2.3)$$

Les principaux auteurs qui utilisent ce modèle pour prédire le comportement des CMC sont [Reynaud, Rouby et Fantozzi, 1993] et [Olivier, 1998].

Dans la zone de décohésion interfaciale, il est aussi classique de considérer le **glissement frottant de type Coulomb** avec

$$\tau(r = R_f, z) = -\mu\sigma_r(r = R_f, z) \quad \text{pour} \quad |z| \leq \frac{d}{2}, \quad (2.4)$$

où $\tau(r = R_f, z)$ est le cisaillement interfacial, $\sigma_r(r = R_f, z)$ est la contrainte radiale à l'interface (figure 1.18) et μ le coefficient de frottement. Cette relation permet de modéliser le glissement à l'interface au cours d'un chargement de traction monotone. Les travaux de [Mc Cartney, 1989] fournissent une méthode analytique pour prédire le transfert de charge entre la fibre et la matrice dans un composite uniaxial à renfort fibreux, associé avec une fissure matricielle ou une rupture de la fibre. Les contraintes résiduelles sont prises en compte ainsi que la différence des coefficients de Poisson entre la fibre et la matrice. Les équations d'équilibres sont satisfaites exactement. Le modèle analytique de [Mc Cartney, 1989] est réaliste et permet de décrire le transfert de charge pour une interface frottante présentant une énergie de rupture nulle. Nous avons vérifié que **ce modèle est en bon accord avec une analyse EF (Annexe A)**.

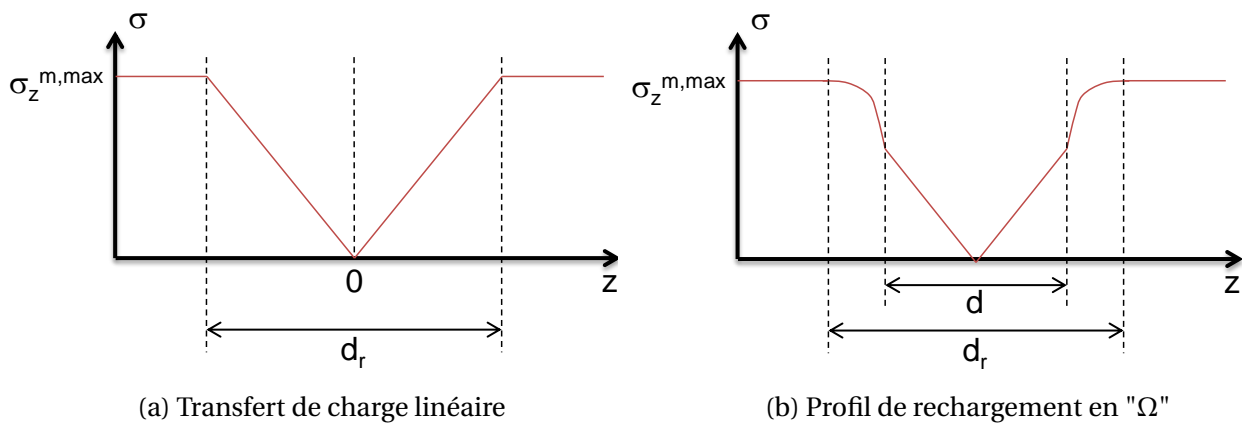


Figure 2.3 – Contrainte axiale dans la matrice au voisinage de la fissure matricielle. d correspond à la longueur de décohésion et la longueur de rechargement est notée d_r . Au delà de la zone de déchargement, la contrainte dans la matrice retrouve la valeur $\sigma_z^{m,max}$. (a) Profil de déchargement obtenu par le modèle linéaire piloté par le cisaillement caractéristique τ (équation 2.1). (b) Profil de déchargement en "Ω" déterminé par [Mc Cartney, 1989] et [Nairn et Liu, 1997].

Le modèle de [Mc Cartney, 1989] ainsi que les travaux de [Nairn et Liu, 1997] montrent que le profil des contraintes axiales dans la matrice au voisinage de l'endommagement se décompose en deux parties (figure 2.3b) : le transfert de charge est linéaire dans la zone frottante puis il faut ajouter une longueur de transfert "élastique" pour atteindre la longueur de rechargement.

Le calcul du taux de restitution d'énergie en présence de frottement pour la décohésion interfaciale est un problème délicat : il faut tenir compte des efforts de frottement lors de la propagation d'un petit incrément de fissure [Sun et Quian, 1998]. L'analyse de la décohésion interfaciale nécessite alors la résolution d'un problème non-linéaire [Graciani et al., 2009]. Il devient tentant d'utiliser un MZC [Chaboche et al., 1997] [Monerie, 2000].

En conclusion, le modèle analytique le plus couramment utilisé dans la modélisation du comportement du microcomposite ou minicomposite est fondé sur l'hypothèse d'un transfert de charge linéaire défini par un cisaillement interfacial caractéristique τ . Il apparaît plus réaliste de caractériser le comportement interfacial à l'aide d'une énergie de rupture G_i^c et d'un coefficient de frottement μ .

II Modèle de zones cohésives pour la propagation de la décohésion avec frottement

Pour introduire un critère de propagation de la décohésion en prenant en compte la présence de frottement, l'emploi d'un modèle de zones cohésives (MZC) semble une bonne solution.

La loi de Tvergaard-Needleman a été utilisée pour **simuler la propagation de la décohésion au cours d'un chargement de traction monotone**. La propagation de la décohésion est gouvernée par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c (section III.2, page 53). Le frottement dans la zone de glissement peut se modéliser par la loi de Coulomb (2.4) lorsque l'élément d'interface est rompu. Pour cela le modèle de zones cohésives déjà présenté (chapitre 1, p. 53) a été enrichi.

II.1 Modification du modèle de zones cohésives

L'avantage de résoudre le problème de glissement frottant à l'aide du MZC est que la condition de contact à l'interface fibre/matrice est satisfaite facilement dans le cas d'une compression normale $T_n < 0$. Ceci résulte de la définition du comportement liant les efforts normaux T_n et le déplacement relatif normal U_n (relation 2.5). Si $U_n < 0$, la valeur de T_n dépend de la rigidité $K_{nMZC} = \frac{27}{4} \frac{\alpha_c \sigma_{max,n}}{\delta_n}$ qui doit être suffisamment élevée pour que le contact soit bien modélisé.

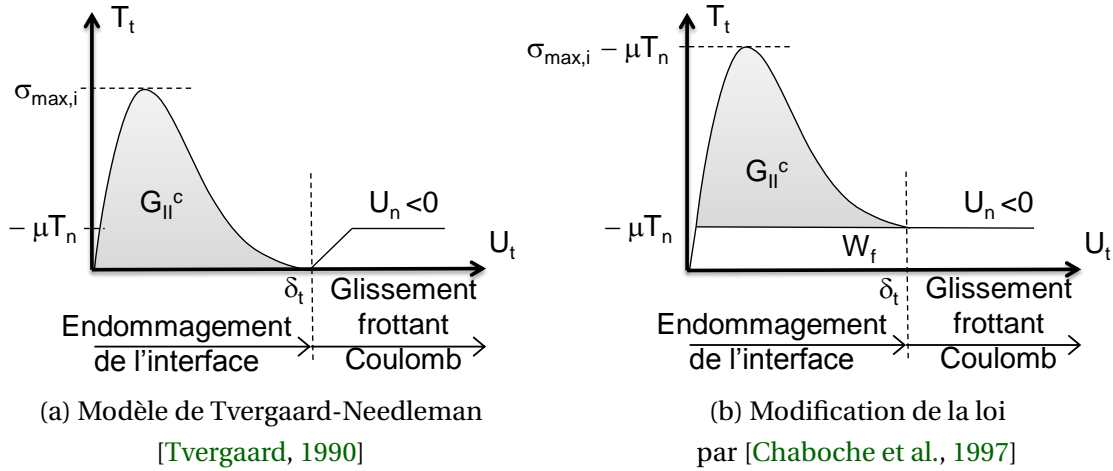


Figure 2.4 – (a) Comportement tangentiel qui relie l'effort tangentiel T_t au glissement relatif U_t du modèle de zones cohésives de Tvergaard-Needleman (2.5). (b) Modification proposée par [Chaboche et al., 1997] (relation 2.6).

Modèle de Tvergaard-Needleman (figure 2.4a)

Dans l'approche de [Tvergaard, 1990] la condition de glissement frottant de Coulomb (2.4) est utilisée directement après l'endommagement complet de l'élément d'interface lorsque $\lambda = 1$ (figure 2.4a). Puis l'effort tangentiel devient constant tel que

$$T_t = -\mu T_n \operatorname{sgn}(U_t) \quad \text{avec} \quad T_n = \frac{27}{4} \alpha_c \sigma_{max,n} \frac{U_n}{\delta_n} \quad \text{si} \quad U_n < 0. \quad (2.5)$$

Comme précédemment, l'effort normal T_n dépend de la rigidité de l'élément en compression.

On constate que le comportement tangentiel des éléments d'interface devient **discontinu** entre l'endommagement et le glissement frottant. Cette discontinuité de la rigidité tangentielle rend la **convergence du calcul difficile** à la fin de l'endommagement.

Pour pallier cette difficulté, une seconde méthode peut être envisagée. Le MZC à partir de la loi de Tvergaard-Needleman est utilisée pour modéliser seulement l'endommagement de l'interface. Pour chaque élément d'interface, ceux qui atteignent la condition de séparation complète ($\lambda = 1$) sont ajoutés à la liste des éléments qui se comportent avec du glissement frottant. Le problème de contact frottant de Coulomb est résolu séparément par le biais d'une procédure itérative déjà implémentée dans Zébulon. Cette procédure demande de vérifier d'abord si la condition de contact est satisfaite avant de modéliser le frottement avec la loi de Coulomb.

Cette seconde méthode permet d'obtenir la convergence du calcul avec un nombre d'incrémentes raisonnable. Cependant la recherche de la condition de contact par la procédure itérative est très coûteuse en temps de calcul, ce qui limite la taille de la cellule et la taille des éléments du maillage à l'interface.

Modèle de Tvergaard-Needleman modifié (figure 2.4b)

Finalement, on propose d'utiliser la **modification du modèle de Tvergaard-Needleman préconisée par [Chaboche et al., 1997]** pour prendre en compte le frottement et **remédier à la discontinuité** de la rigidité des éléments d'interface. Cela permet une convergence du calcul EF en un nombre d'itérations raisonnable. De plus le contact à l'interface est modélisé avec un temps de calcul avantageux. On peut alors envisager d'utiliser des cellules de grande longueur et un maillage suffisamment raffiné à l'interface.

La modification apportée force la continuité et la perte de rigidité monotone entre le comportement au cours de la décohésion et la loi de frottement de Coulomb (figure 2.4b). La seule modification est l'écriture de l'effort tangentiel T_t qui est donné en fonction du glissement U_t par

$$T_t = \left[\frac{27}{4} \sigma_{max,i} F(\lambda_{max}) + \mu \frac{27}{4} \alpha_c \sigma_{max,n} \frac{\langle -U_n \rangle}{\delta_n} \right] \frac{U_t}{\delta_t} . \quad (2.6)$$

La fonction $\langle . \rangle$ est définie telle que $\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Si $U_n \geq 0$ le frottement n'est pas pris en compte et on retrouve la relation exacte de Tvergaard-Needleman (1.53). Le glissement frottant de Coulomb est alors rajouté en compression et peut aussi s'exprimer par $\mu \langle -T_n \rangle$. La dégradation de l'interface est décrite à l'aide de la fonction F qui est donnée par $F(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ comme pour le modèle de Tvergaard-Needleman. En compression dans la direction normale ($U_n < 0$), la rigidité tangentielle diminue et sa valeur lorsque l'élément est totalement endommagé atteint la valeur correspondant au critère de Coulomb pour modéliser le glissement frottant.

Une comparaison est réalisée entre les réponses en traction simulées au cours de la propagation de la décohésion (figure 2.5). On observe que le modèle de Tvergaard-Needleman associé avec la procédure de contact frottant donne des résultats similaires avec la modification du modèle de Tvergaard-Needleman proposée par [Chaboche et al., 1997]. Au plus, un écart de 7 % sur la contrainte appliquée est constaté.

On note que cette loi d'endommagement est adaptée pour simuler la propagation de fissure avec glissement frottant à l'interface au cours d'un **chargement en traction monotone**. Le glissement frottant est obtenu par la loi de Coulomb, mais les mécanismes de frottement statique ne sont pas considérés : au cours de cycles de déchargement ou de rechargement,

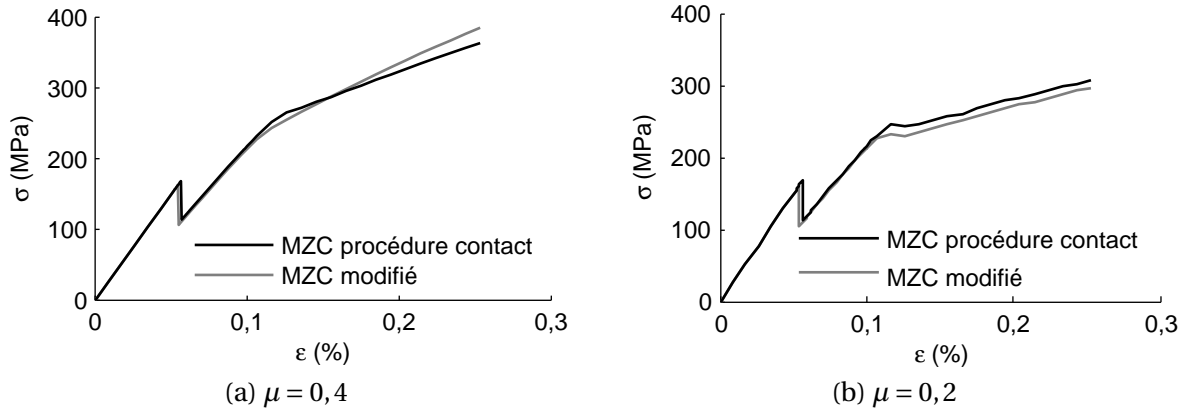


Figure 2.5 – Réponse en traction simulée par le MZC lors de l’amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohé- sion interfaciale dans une cellule élémentaire de taille $L = 100 \mu m$. Le glissement frottant est modélisé à partir du coefficient de frottement μ . Une comparaison est faite entre les deux méthodes proposées : soit le contact frottant est modélisé par la procédure itérative, soit la condition de glissement frottant avec contact est satisfaite par le MZC modifié.

l’adhérence entre la fibre et la matrice est maintenue jusqu’à ce que le cisaillement interfacial atteigne un seuil de glissement. Cette condition de glissement n’est pas prise en compte et la loi d’endommagement proposée n’est pas adaptée pour modéliser les boucles d’hystérésis.

Conditions d’utilisation

On souhaite pouvoir utiliser cette loi d’endommagement de l’interface pour modéliser la propagation de la décohé- sion à partir de l’énergie de rupture de l’interface G_i^c et de la loi de glissement frottant de Coulomb. Pour cela il est nécessaire de s’assurer que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. La décohé- sion interfaciale est gouvernée par le mode de cisaillement et on suppose que l’énergie de rupture en mode II $G_{II}^c = G_i^c$ (section III.2, page 53). L’énergie de rupture G_i^c peut être reliée aux paramètres du modèle de zones cohésives $\sigma_{max,i}$ et δ_t par

$$G_{II}^c = \int_0^{\delta_t} T_t du_t = \frac{9}{16} \sigma_{max,i} \delta_t, \quad (2.7)$$

l’énergie G_{II}^c est alors égale à l’aire sous la courbe représentant l’effort tangentiel en fonction du glissement relatif (figure 2.4a). Pour la loi d’endommagement modifiée, l’aire sous la courbe est décomposée en une énergie de rupture de l’interface G_{II}^c et une énergie dissipée par frottement W_f (figure 2.4b).

2. La rigidité initiale des éléments endommageables doit être suffisamment élevée. Pour cela, les conditions définies par les relations 1.60 doivent être satisfaites. Les contraintes résiduelles axiales et radiales sont ainsi correctement modélisées. Le frottement est pris en compte à l’aide de la loi de Coulomb (2.5) en considérant l’effort de compression radiale et les contraintes résiduelles.

Par la suite on utilisera donc ce dernier modèle d’endommagement modifié qui permet une convergence rapide et un temps de calcul raisonnable. On a observé qu’avec ce modèle la prise en compte du frottement ne change rien à la convergence du calcul.

Caractéristiques de la cellule élémentaire étudiée

Les caractéristiques et paramètres utilisés pour les simulations présentées [figure 2.5](#) sont donnés dans ce paragraphe. Sauf mention contraire, **ces caractéristiques seront utilisées dans toute la suite.**

Les propriétés de la fibre et de la matrice qui constituent la cellule élémentaire sont toujours celles fournies dans le [tableau 1.1](#), p. 32. Les conditions aux limites de type I sont considérées ([figure 1.1](#), p. 32). Pour l'amorçage de la fissure matricielle, le MZC est piloté par la contrainte à rupture de la matrice $\sigma_{max} = 500 \text{ MPa}$. La décohésion interfaciale est gouvernée par une énergie de rupture $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et la contrainte $\sigma_{max,i} = 300 \text{ MPa}$. Les contraintes résiduelles sont induites par une variation de température ΔT et les coefficients de dilatation du [tableau 1.1](#).

II.2 Influence du glissement frottant sur la réponse en traction monotone

Les réponses en traction monotone simulées lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion permettent d'observer l'influence du coefficient de frottement μ ([figure 2.6](#)). Pour réaliser ces calculs à l'aide du MZC, une cellule élémentaire de taille $L = 400 \text{ }\mu\text{m}$ a été utilisée. L'intérêt est de pouvoir étudier un intervalle de longueur de décohésion très large.

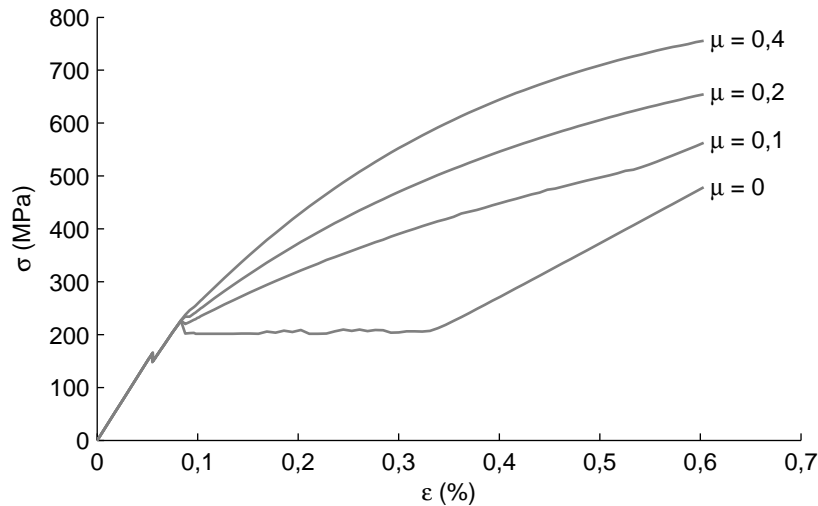


Figure 2.6 – Réponse en traction simulée par le MZC lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale. Le glissement frottant est modélisé. L'influence du coefficient de frottement μ est étudiée.

Le coefficient de frottement μ ne modifie pas le début de propagation de la décohésion ([figure 2.6](#)). On remarque que le comportement est quasiment linéaire au début de la propagation de la décohésion pour $\varepsilon \in [0,1; 0,2] \%$. Le module tangent de la courbe contrainte/déformation au début de la propagation dépend directement de l'intensité du frottement μ . En effet le frottement freine la propagation de la décohésion.

On note que la longueur de décohésion se propage dans la cellule élémentaire jusqu'à ce que la décohésion soit totale dans la cellule. Ensuite la fibre seule supporte le chargement et le module élastique de la cellule est $E_{sat} \approx V_f E_f$ ([figure 2.6](#) $\mu = 0$ et $\mu = 0,1$).

En conclusion, le début de la propagation de la décohésion est uniquement gouverné par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c , puis la propagation de la décohésion dépend à la fois de G_i^c et du coefficient de frottement μ .

III Modèle semi-analytique du minicomposite en traction lors de la propagation de la décohésion avec frottement

On considère le minicomposite en traction et la propagation de la décohésion interfaciale. On souhaite exprimer l'évolution de la décohésion et la déformation axiale du minicomposite en fonction de la contrainte axiale appliquée.

Hypothèses de modélisation - Description de la répartition des contraintes

On suppose que l'énergie de rupture de l'interface G_i^c est non nulle. Le début de la propagation de la décohésion interfaciale est pilotée par G_i^c . La contrainte axiale notée σ^{ci} lors du début de propagation de la décohésion a déjà été exprimée (Eq. 1.80, p. 69). On prend en compte le **saut de contrainte axiale $\gamma(G_i^c)$ dans la fibre** au niveau du front de décohésion, qui a été mis en évidence par certains auteurs (figure 2.2b).

On considère que l'interface frottante est caractérisée par le **frottement de Coulomb**. Le cisaillement interfacial dépend des caractéristiques du minicomposite, de la pression radiale exercée sur l'interface et du coefficient de frottement μ (Eq. 2.4). Les contraintes radiales ont pour origine les contraintes résiduelles d'origine thermique et la différence entre les coefficients de Poisson des fibres et de la matrice.

Enfin, le transfert de contraintes n'est pas localisé seulement au niveau de la décohésion. Il faut ajouter une zone de transfert élastique dans la zone sans décohésion du minicomposite (figure 2.3b). Le profil de rechargement a alors une forme de " Ω ". Cette **zone de transfert de contraintes dans la partie sans décohésion du minicomposite** est prise en compte dans le modèle proposé. Cette **zone transitoire** apparaît aussi bien au voisinage de la décohésion interfaciale que de la fissure matricielle.

La prise en compte de ces trois éléments doit permettre une modélisation plus réaliste de l'évolution de la décohésion et du comportement en traction par rapport au modèle de rechargement linéaire mentionné précédemment (p. 76 - 78).

Développement du modèle

Le développement de ce modèle est réalisé en deux étapes.

On s'appuie à nouveau sur les travaux de [Hutchinson et Jensen, 1990] qui ont proposé d'exprimer les contraintes et déformations supportées par les fibres et la matrice. Des relations simples sont formulées grâce à l'utilisation de coefficients écrits en fonction des propriétés des fibres et de la matrice ainsi que des caractéristiques du minicomposite.

Ce modèle ne permet cependant pas de décrire la redistribution des contraintes dans la partie sans décohésion du minicomposite (zone transitoire), car ce mécanisme est en effet relativement complexe à analyser. Pour cette première étape, la redistribution des contraintes au droit de la décohésion est donc négligée.

A partir des contraintes supportées par la fibre et la matrice, l'évolution de la longueur de décohésion ainsi que la déformation axiale du minicomposite en traction sont exprimées.

La deuxième étape consiste à prendre en compte la redistribution des contraintes au droit de la décohésion interfaciale (zone transitoire). Pour cela une correction est apportée au modèle précédent grâce à l'identification de certains coefficients à l'aide de calculs EF.

III.1 Modèle analytique de la propagation de la décohésion interfaciale

On note σ la contrainte axiale appliquée sur le minicomposite en traction. On suppose que la fissure matricielle est déjà créée au centre de la cellule élémentaire et on étudie la propagation de la décohésion.

Ce paragraphe présente les principales étapes de développement du modèle analytique. Le détail du développement est reporté en [Annexe F](#). **La zone transitoire de rechargement des contraintes au droit de la décohésion interfaciale n'est pas prise en compte pour l'instant (figure 2.7).**

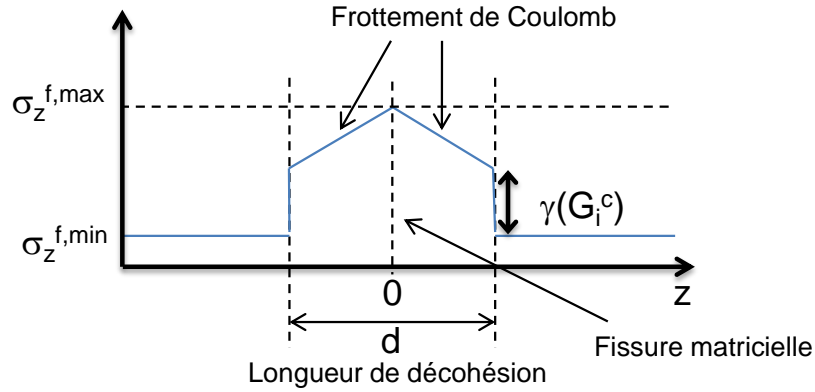


Figure 2.7 – Contrainte axiale dans la fibre le long du minicomposite au voisinage de la décohésion interfaciale. La zone transitoire n'est pas prise en compte.

Les expressions proposées sont fondées sur les contraintes axiales et radiales supportées par les fibres et la matrice.

Energie de rupture de l'interface et saut de contrainte en pointe de décohésion

On considère l'évolution de la contrainte axiale supportée par la fibre le long de la décohésion interfaciale, notée $\sigma_z^f(z)$. La contrainte $\sigma_z^f(z)$ est formulée analytiquement à partir des caractéristiques du minicomposite, du coefficient de frottement μ et bien sûr de la contrainte appliquée σ (Équation F-62, p. 238).

La présence d'une énergie de rupture de l'interface G_i^c non nulle impose un saut de contrainte axiale dans la fibre au niveau de la décohésion interfaciale (figure 2.2b). Ce saut de contrainte est noté γ et dépend de G_i^c suivant l'expression

$$\gamma(G_i^c) = \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

On peut expliquer l'expression du saut de contrainte $\gamma(G_i^c)$ en considérant la contrainte axiale σ^{ci} du minicomposite lors du début de propagation de la décohésion ([Annexe F](#), p. 233).

Expression de la longueur de décohésion

On souhaite d'abord exprimer la longueur de décohésion $d(\sigma)$. Pour cela, on utilise l'expression de la contrainte $\sigma_z^f(z)$ et le fait qu'au niveau de la fissure matricielle, la matrice est entièrement déchargée. Cela impose que la contrainte axiale supportée par la fibre au niveau de la fissure matricielle soit égale à $\frac{\sigma}{V_f}$, où V_f est la fraction volumique de fibres ([Annexe F](#), p. 238).

L'expression de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ obtenue est

$$\frac{d(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\mu b_1} \ln \left[\frac{1}{k_1 + 1} \frac{\sigma_{contact} - \sigma^{ci} + k_1 (\sigma_{contact} - \sigma)}{\sigma_{contact} - \sigma} \right], \quad (2.9)$$

où le coefficient k_1 s'exprime par

$$k_1 = \frac{V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{a_3}{b_1}. \quad (2.10)$$

Contrainte $\sigma_{contact}$

La contrainte $\sigma_{contact}$ est le chargement appliqué tel qu'il n'y a **plus de contact entre la fibre et la matrice à l'interface** (Annexe F, p.239). Cette contrainte s'écrit à partir des coefficients de Hutchinson suivant l'équation

$$\sigma_{contact} = \frac{(1 - a_1 V_f)(a_4 - a_2 b_1)}{a_2 (b_1 (1 - a_1 V_f) + a_3 V_f)} \sigma^T, \quad (2.11)$$

où la contrainte résiduelle σ^T a déjà été définie (Équation 1.12, p. 36). La contrainte $\sigma_{contact}$ est nulle si les contraintes résiduelles d'origine thermique ne sont pas considérées. En effet, sans contraintes résiduelles, aucune contrainte radiale n'est exercée sur le minicomposite sans chargement mécanique.

L'évolution de la décohésion $d(\sigma)$ (2.9) donne bien une longueur de décohésion nulle lorsque la contrainte appliquée $\sigma = \sigma^{ci}$. De plus la décohésion tend vers une valeur très élevée lorsque σ tend vers $\sigma_{contact}$, c'est à dire lorsque il n'y a plus contact entre la fibre et la matrice.

Coefficients de Hutchinson et Jensen

Les coefficients de [Hutchinson et Jensen, 1990] a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 et k_1 sont écrits à partir des caractéristiques du minicomposite et des propriétés de la matrice. Ils sont répertoriés en Annexe E.

On précise que **si les coefficients de Poisson des fibres et de la matrice sont de même valeur, alors les coefficients a_3 et k_1 sont nuls**. Dans ce cas, la décohésion $d(\sigma)$ s'écrit plus simplement par

$$\frac{d(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\mu b_1} \ln \left[\frac{\sigma_{contact} - \sigma^{ci}}{\sigma_{contact} - \sigma} \right]. \quad (2.12)$$

Cette expression est identique à celle de [Hutchinson et Jensen, 1990]. La fonction logarithme est due à l'utilisation de l'exponentielle pour exprimer $\sigma_z^f(z)$ le long de la décohésion interfaciale.

Expression de la déformation axiale

La déformation axiale appliquée sur le minicomposite, notée $\varepsilon(\sigma, L, d)$, dépend de la contrainte axiale σ , de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ et du coefficient de frottement μ .

Le calcul de $\varepsilon(\sigma, L, d)$ demande de déterminer le déplacement axial du minicomposite dans la partie présentant la décohésion d'une part, ainsi que dans la partie saine du minicomposite d'autre part. On utilise l'expression de la contrainte axiale dans la fibre $\sigma_z^f(z)$ (Annexe

F, p. 239). Après développement, on obtient

$$\varepsilon(\sigma, L, d) = \frac{\sigma}{E_0} - \frac{1}{b_1} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4 \sigma^T}{a_2 E_0} \right) \frac{d}{L} + \frac{R_f}{\mu b_1^2 L} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4 \sigma^T}{a_2 E_0} + b_1 \frac{\gamma}{E_f} \right) \left(1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right) .$$

avec $A = \frac{1 - a_1 V_f}{a_1 V_f}$

(2.13)

En l'absence de décohésion ($d = 0$) seule la fissure matricielle est présente. Or la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d = 0)$ obtenue est celle du minicomposite sain (sans fissure matricielle) puisque

$$\varepsilon(\sigma, L, d = 0) = \frac{\sigma}{E_0} . \quad (2.14)$$

Avec ce modèle analytique, la fissure matricielle n'entraîne pas de perte de rigidité. Elle n'a pas d'effet sur la réponse en traction. Cela résulte du fait que la zone transitoire de répartition des contraintes en pointe de fissure n'est pas considérée.

La réponse contrainte/déformation lors de la propagation de la décohésion est modélisée à partir des relations 2.9 et 2.13. L'influence des valeurs du coefficient de frottement est présentée dans la figure 2.8. La taille de la cellule élémentaire utilisée est $L = 400 \mu m$. Etant donné que la zone transitoire de redistribution des contraintes n'est pas prise en compte, la perte de rigidité liée à l'amorçage de la fissure matricielle ne peut pas être décrite.

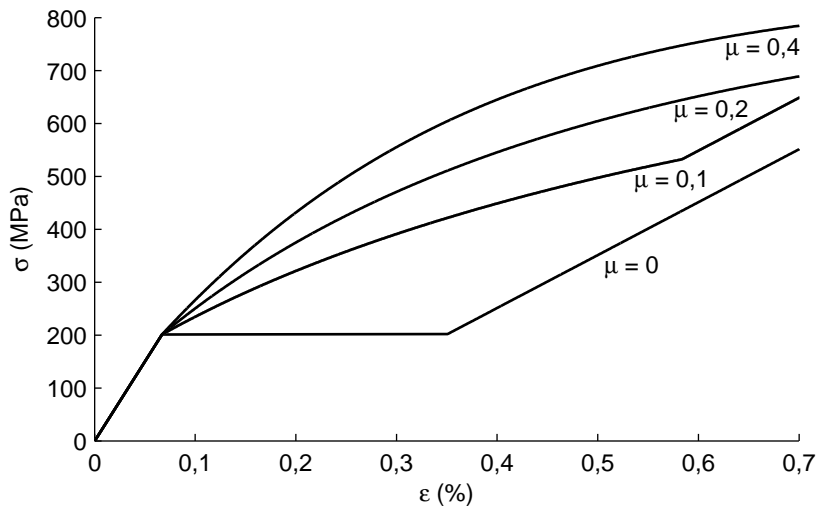


Figure 2.8 – Réponse en traction simulée par le modèle analytique lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans une cellule de longueur $L = 400 \mu m$.

III.2 Correction pour la redistribution des contraintes au droit de la décohésion

Lorsque la cellule élémentaire est de grande dimension par rapport à la zone transitoire, celle-ci a peu d'effet sur le comportement. Les calculs précédents ont été réalisés à partir d'une cellule de taille $400 \mu m$ (figure 2.6 et 2.8). La zone de redistribution des contraintes observée atteint au maximum une distance de $6R_f$ de part et d'autre de la fissure matricielle. La cellule élémentaire est alors de longueur presque 10 fois plus grande que la zone transitoire.

Cependant l'évolution de la fissuration matricielle mesurée lors des essais de traction sur minicomposite donne des pas de fissuration moyens pouvant atteindre un minimum de $30 \mu m$.

On propose d'ajouter une correction au modèle analytique précédent pour prendre en compte l'influence de la zone transitoire sur le comportement en traction.

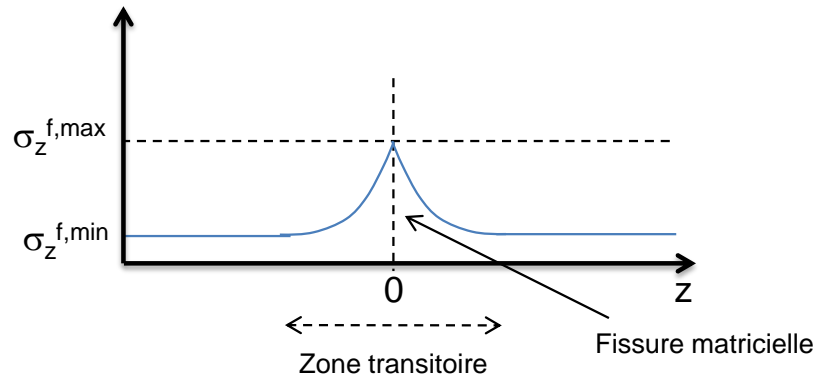


Figure 2.9 – Contrainte axiale dans la fibre le long du minicomposite au voisinage de la fissure matricielle sans décohésion.

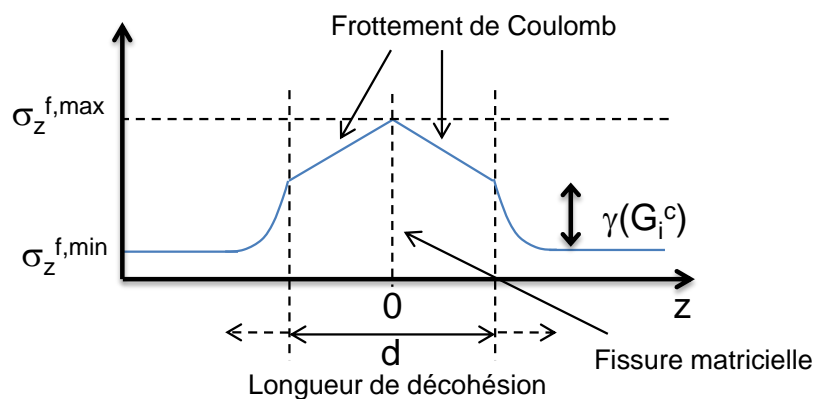


Figure 2.10 – Contrainte axiale dans la fibre le long du minicomposite au voisinage de la décohésion interfaciale. La zone transitoire est prise en compte.

Le cas de la fissure matricielle seule (figure 2.9) a déjà été traité. La perte de rigidité résulte de la zone de redistribution des contraintes de part et d'autre de la fissure matricielle. Le module élastique du minicomposite contenant la fissure matricielle a été déterminé par calculs EF en identifiant le coefficient D_1^0 (chapitre 1, p. 33 - 34). Cela permet d'exprimer le déplacement axial supplémentaire résultant de cette zone de transtion.

En présence de la décohésion interfaciale, on considère la différence entre les contraintes supportées par la fibre, loin de la zone fissurée et au niveau du front de décohésion. Cette différence de contraintes correspond à $\gamma(G_i^c)$. On considère de plus la redistribution des contraintes au droit de la décohésion interfaciale (figure 2.10).

La nouvelle expression de la déformation $\varepsilon(\sigma, d)$ est obtenue en écrivant le déplacement du minicomposite dans la zone de décohésion d'une part, et dans la zone de transition au droit de la décohésion interfaciale d'autre part. Le déplacement axial dans la zone transitoire est écrit en utilisant le coefficient D_1^0 .

L'expression de la déformation $\varepsilon(\sigma, d)$ (2.13) est modifiée de la manière suivante :

$$\varepsilon(\sigma, L, d) = \frac{\sigma}{E_0} - \frac{1}{b_1} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} \right) \frac{d}{L} + \frac{R_f}{\mu b_1^2 L} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} + b_1 \frac{\gamma}{E_f} \right) \left(1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right) + D_1^0 \frac{R_f}{L} \frac{\sigma^{ci} + \sigma^T}{E_0} \left(1 - \frac{d}{L} \right) \quad (2.15)$$

Un terme supplémentaire apparaît. Il correspond à la déformation le long de la zone transitoire, paramétré par le coefficient D_1^0 .

La décohésion commence à se propager lorsque la contrainte axiale σ atteint σ^{ci} . La décohésion $d(\sigma = \sigma^{ci}) = 0$. La déformation obtenue par l'Équation 2.15 devient

$$\varepsilon(\sigma = \sigma^{ci}, L, d = 0) = \frac{1}{E_0} \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L} \right) \sigma^{ci} + D_1^0 \frac{R_f}{L} \frac{\sigma^T}{E_0} \quad (2.16)$$

On reconnaît dans cette expression le module élastique du minicomposite avec fissures matricielles $E(L)$ et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L)$ (Eq. 1.79, p. 68). La déformation peut encore s'écrire

$$\varepsilon(\sigma = \sigma^{ci}, L, d = 0) = \frac{\sigma^{ci}}{E(L)} + \varepsilon_r(L) \quad (2.17)$$

La zone de transition au voisinage de la fissure matricielle est prise en compte. L'effet de la fissure matricielle sur le comportement mécanique est donc modélisé.

De plus, lorsque la décohésion atteint toute la longueur de la cellule élémentaire ($d = L$), on a supposé que le transfert des contraintes dans toute la cellule est régi par le glissement frottant : la zone transitoire n'existe plus. Ceci explique que lorsque $d = L$, le terme ajouté s'annule.

La réponse en traction lors de la propagation de la décohésion est obtenue en utilisant $d(\sigma)$ (2.9) et $\varepsilon(\sigma, L, d)$ (2.15). Le modèle est dit semi-analytique puisqu'il nécessite l'identification du coefficient D_1^0 à l'aide des calculs EF.

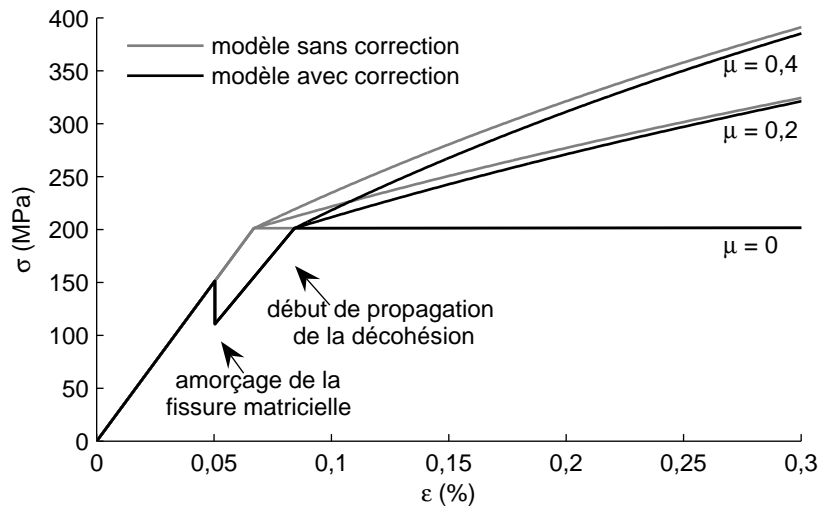


Figure 2.11 – Réponse en traction simulée par le modèle analytique avant et après la correction, lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans une cellule de longueur $L = 100 \mu m$.

Comportement en traction avec le modèle semi-analytique

On compare la réponse en traction obtenue avec l'expression modifiée de la déformation axiale au cours de la propagation de la décohésion (figure 2.11). On considère une cellule élémentaire de plus petite dimension que précédemment avec $L = 100 \mu m$ pour que l'effet de la zone de transition soit plus marqué.

Le modèle analytique avant la modification ne tenait pas compte de cette zone transitoire de redistribution des contraintes au-delà de la décohésion interfaciale et au voisinage de la fissure matricielle.

Le modèle semi-analytique, après la correction pour la prise en compte de cette zone transitoire, permet d'observer l'amorçage de la fissure matricielle sur la courbe de comportement en traction. Lors de la propagation de la décohésion, on observe aussi un comportement moins rigide.

La différence entre les deux comportements de cette cellule élémentaire de $100 \mu m$, avec et sans prise en compte de la zone transitoire, est très marquée.

On précise que seul le comportement résultant de la propagation de la décohésion interfaciale est tracé à partir de l'expression 2.15. Pour modéliser l'amorçage de la fissure matricielle, le module élastique $E(L)$ et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L)$ sont employés. La continuité entre les deux domaines est assurée (cf. Eq. 2.16).

III.3 Comparaison avec le modèle de zones cohésives

On souhaite comparer le comportement en traction, obtenu à l'aide du modèle semi-analytique, avec le résultat du modèle de zones cohésives qui constitue le modèle de référence. Cette comparaison doit permettre de juger le modèle semi-analytique développé.

Le MZC et le modèle semi-analytique tiennent compte :

- d'une énergie de rupture de l'interface G_i^c qui pilote le début de la propagation de la décohésion,
- de la modélisation du frottement par la loi de Coulomb,
- d'une description réaliste du transfert de charge entre la fibre et la matrice.

Les comparaisons entre les deux modèles sont réalisées en choisissant des cellules élémentaires de dimensions $L = 400 \mu m$ (figure 2.12) et $L = 100 \mu m$ (figure 2.13). On observe immédiatement une très bonne corrélation de la réponse en traction lors de la propagation de la décohésion interfaciale.

Pour la mise en œuvre du MZC, un déplacement croissant est imposé sur les extrémités de la cellule élémentaire. Ce déplacement est imposé par incréments. Le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle, simulé par le MZC, dépend alors des incréments de calcul. Des petits pas d'incrément sont nécessaires pour identifier le mieux possible le chargement de traction au moment de l'amorçage de la fissure. Cela entraîne les différences de comportement au moment de l'amorçage de la fissure matricielle.

En plus de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c qui régit la propagation de la décohésion, le MZC nécessite un critère en contrainte pour son amorçage, noté $\sigma_{max,i}$. Cela a déjà été discuté (cf. figure 1.25, p. 56-57). Pour le modèle analytique, il est raisonnable de considérer

que le début de propagation de la décohésion est également piloté par G_i^c . Cela entraîne les différences de comportement observables au début de propagation de la décohésion.

Cependant on observe bien que **le comportement après le début de la propagation de la décohésion, simulé par les deux modèles, est identique.**

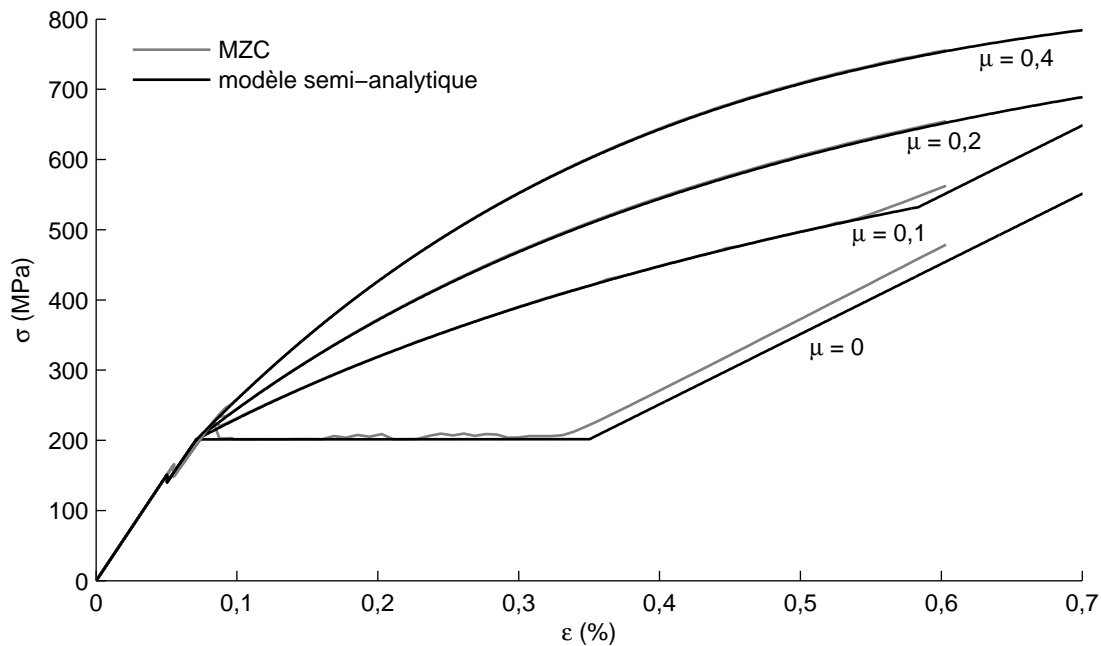


Figure 2.12 – Réponse en traction lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfasciale dans une cellule de longueur $L = 400 \mu m$. Comparaison entre le modèle semi-analytique et le MZC.

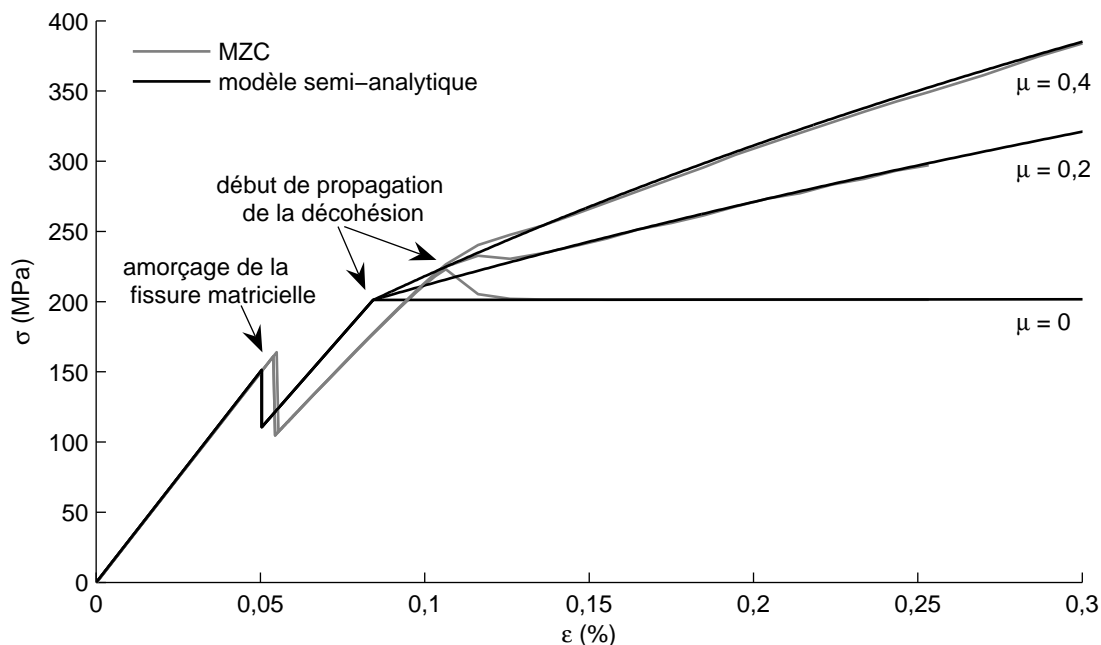


Figure 2.13 – Réponse en traction lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfasciale dans une cellule de longueur $L = 100 \mu m$. Comparaison entre le modèle semi-analytique et le MZC.

L'influence de la zone transitoire de rechargement des contraintes est plus marquée avec une cellule élémentaire de plus petite taille (figure 2.13). La modification du modèle analytique afin de prendre en compte cette zone de transition a permis une bonne correspondance avec les résultats du MZC.

IV Longueur de décohé- sion au cours de la traction monotone

La longueur de décohé- sion $d(\sigma)$ au cours du chargement de traction a été exprimée par la relation (2.9). La figure 2.14 montre l'influence du frottement sur $d(\sigma)$ ainsi obtenu.

Si le glissement à l'interface est sans frottement ($\mu = 0$), on observe alors que la décohé- sion se propage entièrement lorsque la contrainte appliquée atteint σ^{ci} (relation 1.52). Cette contrainte qui permet de propager la décohé- sion a été exprimée en fonction de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Compte tenu des caractéristiques du minicomposite étudié avec $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$, la contrainte σ^{ci} vaut 200 MPa. Le frottement permet de retarder la propagation de la décohé- sion d qui croît en fonction de la contrainte appliquée σ .

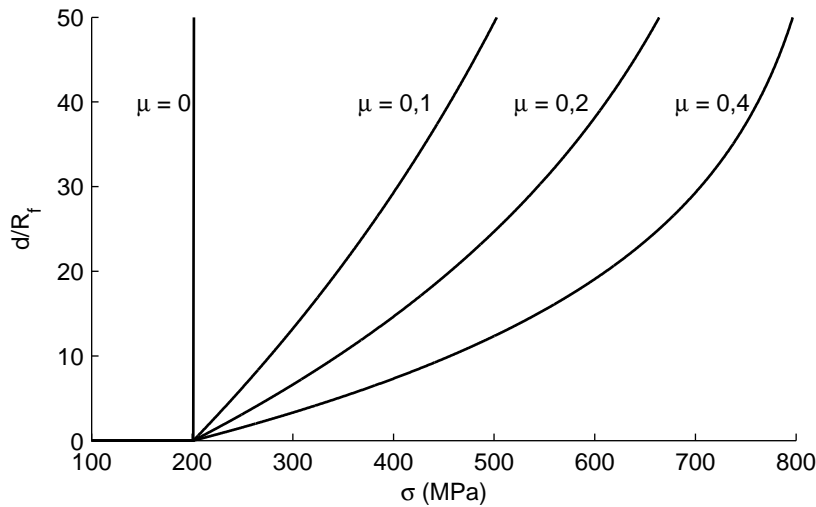


Figure 2.14 – Evolution de la longueur de décohé- sion d à partir de la contrainte appliquée σ pour trois valeurs du coefficient de frottement μ . L'expression (2.9) de $d(\sigma)$ est utilisée.

On remarque que la propagation de la décohé- sion s'accélère avec le chargement en traction. En effet, les contraintes de compression radiale diminuent avec la traction jusqu'à ce que le contact entre la fibre et la matrice soit perdu. Cela a été observé en étudiant la répartition des contraintes dans le minicomposite en traction (Annexe A, figure A-2d). L'intensité du frottement diminue alors avec le chargement en traction, ce qui favorise la propagation de la décohé- sion. Cette évolution de la longueur de décohé- sion est en accord avec l'analyse de [Mc Cartney, 1989].

Les contraintes radiales diminuent donc avec le chargement en traction. Il existe un contact à l'interface entre la fibre et la matrice, tant qu'une pression positive est exercée par la matrice sur la fibre. Il existe alors un niveau de chargement au delà duquel le contact n'est plus observé sur toute la longueur de décohé- sion. On note $\sigma_{contact}$ la contrainte appliquée sur le minicomposite telle que le contact entre la fibre et la matrice n'est plus observé.

La contrainte $\sigma_{contact}$ est exprimée par la relation (2.11). Avec les caractéristiques utilisées pour ce chapitre, la contrainte $\sigma_{contact} = 850$ MPa. Cette contrainte intervient dans l'expression de la décohé- sion $d(\sigma)$ (2.9). Lorsque le chargement appliqué σ tend vers la contrainte $\sigma_{contact}$, la longueur de décohé- sion croît vers une valeur très grande. Cette expression donne aussi une longueur de décohé- sion nulle tant que la contrainte appliquée σ est inférieure à σ^{ci} .

IV.1 Comparaison avec le modèle de rechargement linéaire

Dans la littérature, le modèle de rechargement linéaire est largement utilisé pour déterminer la propagation de la décohésion (figure 2.1). Avec ce modèle, la longueur de décohésion $d(\sigma)$ évolue linéairement et s'exprime à partir du cisaillement interfacial caractéristique τ (Eq. 2.3). La longueur de décohésion $d(\sigma)$ peut s'exprimer par

$$\frac{d(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\tau} \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} (\sigma - \sigma^{ci}), \quad (2.18)$$

où σ^{ci} (1.52) est la contrainte appliquée qui permet de propager la décohésion.

Il est intéressant de déterminer dans quelle mesure le cisaillement interfacial caractéristique τ peut être relié au coefficient de frottement μ et à G_i^c .

Avec la loi de frottement de Coulomb, le cisaillement interfacial dépend de la contrainte radiale et n'est pas constant. A priori il est donc difficile de comparer le modèle développé avec l'hypothèse de rechargement linéaire, puisqu'un cisaillement interfacial constant τ est considéré. Le modèle de rechargement linéaire, contrairement à la loi de Coulomb, produit une évolution linéaire de la longueur de décohésion (figure 2.15).

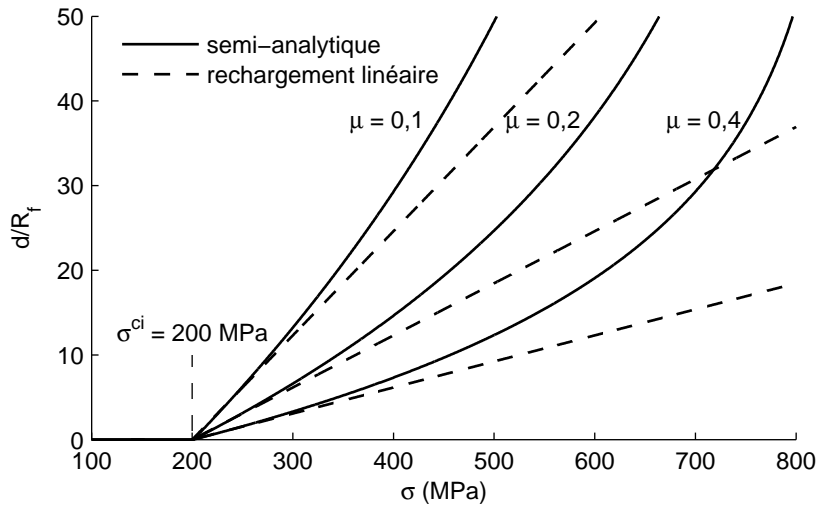


Figure 2.15 – Evolution de la longueur de décohésion obtenue en considérant la loi de frottement de Coulomb (2.9) ou à l'aide du modèle de rechargement linéaire (2.18). Pour le premier modèle, le glissement frottant est pris en compte et paramétré par le coefficient μ . Pour le modèle de rechargement linéaire, le cisaillement caractéristique à l'interface utilisé est $\tau = [10, 8; 21, 7; 43, 3] \text{ MPa}$ (2.19).

Cependant, il n'est pas absurde, au tout début de la propagation de la décohésion, de simuler l'évolution de $d(\sigma)$ par une fonction linéaire. L'amplitude de l'intervalle des contraintes, compatible avec l'hypothèse de décohésion linéaire, dépend du frottement et des caractéristiques du minicomposite.

On considère alors ce faible intervalle au début de la propagation de la décohésion, tel que l'évolution de la décohésion puisse être considérée comme linéaire. En prenant en compte seulement cet intervalle, il est possible de relier simplement le cisaillement interfacial caractéristique τ au coefficient de frottement μ et à G_i^c . Les détails des calculs sont décrits dans l'Annexe C. La relation obtenue est

$$\tau \approx \mu b_1 \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} (\sigma_{contact} - \sigma^{ci}). \quad (2.19)$$

Cela confirme que le cisaillement interfacial τ doit être considéré comme un paramètre dépendant du coefficient de frottement μ , de G_i^c ainsi que des caractéristiques du microcomposite (contraintes résiduelles, V_f , ...).

μ	0,1	0,2	0,4	
τ	10,8 MPa	21,7 MPa	43,3 MPa	pour $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$

Tableau 2.1 – Valeurs du cisaillement interfacial caractéristique τ utilisé pour le modèle de rechargement linéaire et estimés à partir de la relation (2.19).

La figure 2.15 compare les deux modèles d'évolution de $d(\sigma)$ (2.9 et 2.18) en choisissant un cisaillement caractéristique τ suivant la relation (2.19). Les valeurs de τ obtenues sont écrites dans le tableau 2.1. L'accord est acceptable pour les plus faibles valeurs de contrainte. Cependant la loi de rechargement linéaire sous-estime la longueur de décohésion.

Comparaison du comportement en traction

Une expression de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, d)$ a également été développée à partir du modèle de rechargement linéaire.

Expression de la déformation axiale

Le cisaillement interfacial caractéristique τ est un paramètre du modèle. La zone transitoire de rechargement des contraintes n'est pas considérée. Le développement est présenté en Annexe F, p. 230-235. L'expression de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$ obtenue est

$$\varepsilon(\sigma, L, d) = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + A \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1 - a_1 V_f}{a_1 V_f}. \quad (2.20)$$

On peut décomposer cette expression sous forme de déformations élastiques apparentes avec le **module élastique apparent**

$$\frac{1}{E(L, d)} = \frac{1}{E_0} \left(1 + A \frac{d}{L} \right), \quad (2.21)$$

et de **déformations résiduelles apparentes**

$$\varepsilon_r(L, d, \tau) = A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L}. \quad (2.22)$$

On remarque que le module élastique apparent ainsi obtenu est similaire au module élastique du minicomposite sans frottement interfacial (Équation 1.81, p. 69). La zone transitoire n'est pas prise en compte, cela revient donc à considérer le coefficient $D_1^0 = 0$.

Les déformations résiduelles apparentes correspondent à la différence entre les déformations résiduelles d'origine thermique en l'absence de frottement (Équation 1.81) et d'un terme supplémentaire dépendant directement du cisaillement τ .

Il est donc possible que les déformations résiduelles apparentes ne soient pas croissantes et soient même négatives en fonction de l'intensité du frottement.

Comparaison entre les deux modèles

Le comportement en traction est tracé :

- à partir du modèle semi-analytique d'une part en utilisant $d(\sigma)$ (2.9) et $\varepsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ (2.15),
- à partir du modèle de rechargement linéaire d'autre part en utilisant $d(\sigma)$ (2.18) et $\varepsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ (2.20). Les valeurs du cisaillement interfacial caractéristique τ sont choisies en fonction de μ et de G_i^c (2.19).

La réponse en traction est similaire au début de la propagation de la décohésion (figure 2.16). En effet l'évolution de la longueur de décohésion présente le moins d'écart au début de la propagation.

Cependant le modèle de rechargement linéaire sous-estime la longueur de décohésion pour des niveaux de chargement plus élevés. Cela se traduit sur la réponse en traction par un comportement plus rigide.

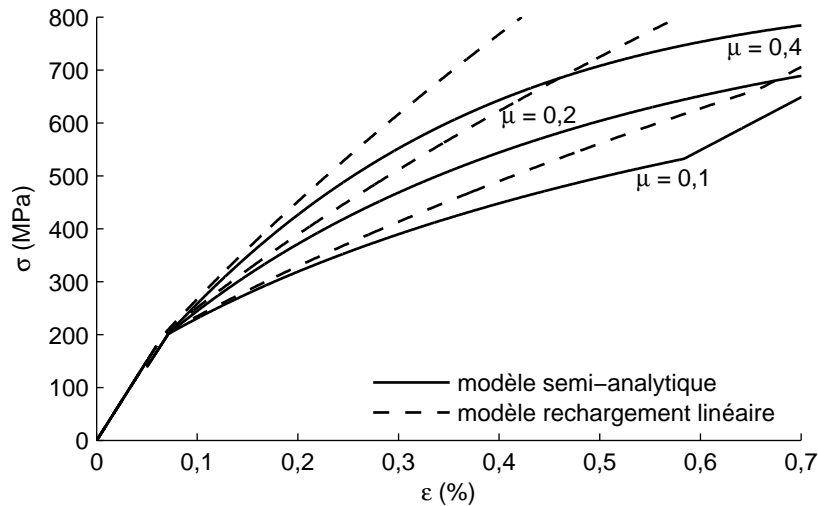


Figure 2.16 – Réponse en traction lors de la fissuration matricielle et de la propagation de la décohésion dans la cellule élémentaire de longueur $L = 400 \mu m$. Le modèle semi-analytique (Équation 2.15) est comparé au modèle de rechargement linéaire (Équation 2.20). Plusieurs valeurs du coefficient de frottement μ sont étudiées.

IV.2 Influence de l'énergie de rupture de l'interface

L'effet du coefficient de frottement sur l'évolution de la décohésion a été montré. Le frottement freine la propagation de la décohésion.

Le début de propagation de la décohésion est conditionné par l'énergie de rupture de l'interface (figure 2.17). Deux énergies de rupture sont étudiées. La contrainte axiale appliquée lors du début de propagation de la décohésion est

$$\sigma^{ci} = 200 \text{ MPa si } G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2} \quad \text{et} \quad \sigma^{ci} = 77 \text{ MPa si } G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}.$$

Avec une énergie de rupture $G_i^c = 2 \text{ J.m}^{-2}$, la contrainte de début de propagation σ^{ci} est inférieure à la contrainte appliquée lors de l'amorçage de la fissure matricielle. Dès l'amorçage de la fissure matricielle, une décohésion est donc créée, ce qui provoque une perte de rigidité plus importante. Etant donné que le chargement en traction est imposé en déplacement, cette perte de rigidité se traduit par une chute de contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle. Cela explique la chute de contrainte pour les faibles décohésions sur la figure 2.17b.

Le contact entre la fibre et la matrice à l'interface n'existe plus lorsque la contrainte axiale atteint la contrainte $\sigma_{contact}$ (2.11). Avec les caractéristiques utilisées dans ce chapitre, la contrainte $\sigma_{contact} = 850$ MPa. L'accroissement de la décohéation s'accélère avant d'atteindre $\sigma_{contact}$, quelle que soit la valeur de l'énergie de rupture G_i^c .

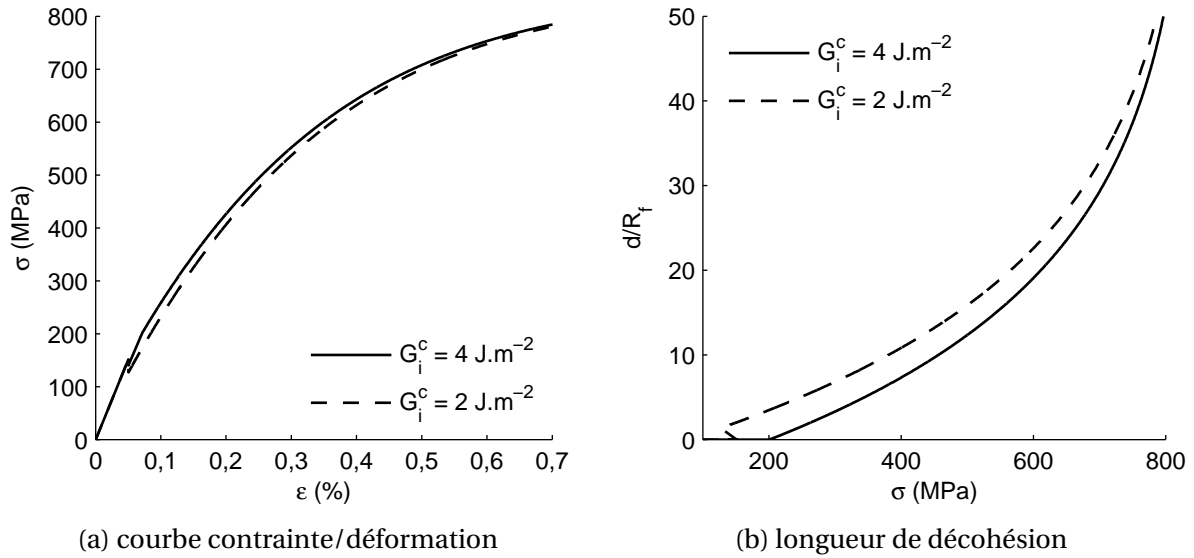


Figure 2.17 – (a) Courbe contrainte/déformation au cours de l'endommagement de la cellule élémentaire (fissuration de la matrice et propagation de la décohéation à l'interface). (b) Evolution de la longueur de décohéation d . Le glissement frottant est pris en compte avec $\mu = 0,4$.

IV.3 Influence du type de conditions aux limites

Le microcomposite est modélisé à partir des conditions aux limites notées CL I et le minicomposite à partir des CL II (chapitre 1, figure 1.1 p. 31). Les calculs et résultats présentés dans ce chapitre sont réalisés en prenant en compte les CL I.

Le choix des conditions aux limites de type CL I ou CL II modifie considérablement l'évolution de la décohéation et la réponse en traction (figure 2.18). La décohéation se propage plus rapidement en considérant les CL II pour la modélisation du minicomposite.

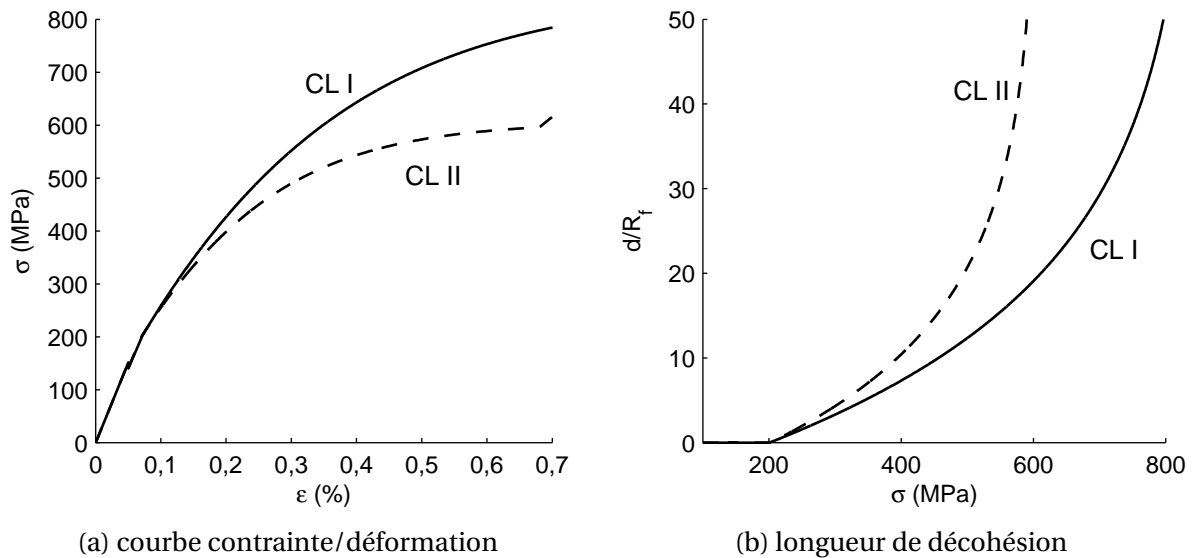


Figure 2.18 – (a) Courbe contrainte/déformation au cours de l'endommagement de la cellule élémentaire (fissuration de la matrice et propagation de la décohéation à l'interface). (b) Evolution de la longueur de décohéation d . Le glissement frottant est pris en compte avec $\mu = 0,4$.

Cela résulte de la modification des contraintes radiales induites par les conditions aux limites sur les bords de la matrice dans la cellule élémentaire : pour les CL I les bords sont libres alors que pour les CL II un déplacement est imposé dans la direction radiale. Cela introduit un état de contrainte différent dans la direction radiale.

On précise que la décohésion $d(\sigma)$ (2.9) et la déformation appliquée $\varepsilon(\sigma, d)$ (2.15) ont la même expression pour les CL I ou les CL II. Ce sont les coefficients a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 , ainsi que le coefficient D_1^0 identifié à l'aide des calculs EF, qui s'écrivent différemment en fonction des CL I ou CL II.

L'expression de la décohésion $d(\sigma)$ fait intervenir la contrainte axiale $\sigma_{contact}$ (2.11) telle que le contact entre la fibre et la matrice n'est plus présent. Cette contrainte s'exprime également à partir des coefficients énoncés précédemment. La contrainte $\sigma_{contact}$ est bien plus faible avec les CL II avec

$$\sigma_{contact} = 850 \text{ MPa pour les CL I} \quad \text{et} \quad \sigma_{contact} = 605 \text{ MPa pour les CL II.}$$

IV.4 Influence des coefficients de Poisson

Au cours du chapitre précédent, on a remarqué que des coefficients de Poisson différents pour les fibres et la matrice ($\nu_f \neq \nu_m$) n'ont que très peu d'effet sur l'amorçage de la fissure matricielle et le début de propagation de la décohésion. On a alors choisi des coefficients de Poisson des fibres et de la matrice identiques $\nu_f = \nu_m = 0,2$, dans les [chapitre 1](#) et [2](#).

Cependant, parmi les facteurs influents sur les contraintes radiales, les contraintes résiduelles d'origine thermique et la différence entre les coefficients de Poisson des fibres et de la matrice sont essentielles. Les valeurs de la littérature des coefficients de Poisson des fibres SiC et de la matrice SiC sont $\nu_f = 0,12$ et $\nu_m = 0,2$.

La différence entre les coefficients de Poisson modifie l'évolution de la longueur de décohésion en présence de glissement frottant à l'interface ([figure 2.19](#)). La contrainte $\sigma_{contact}$ (2.11) dépend fortement de ces coefficients avec

$$\sigma_{contact} = 850 \text{ MPa si } \begin{cases} \nu_f = 0,2 \\ \nu_m = 0,2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_{contact} = 1417 \text{ MPa si } \begin{cases} \nu_f = 0,12 \\ \nu_m = 0,2 \end{cases}.$$

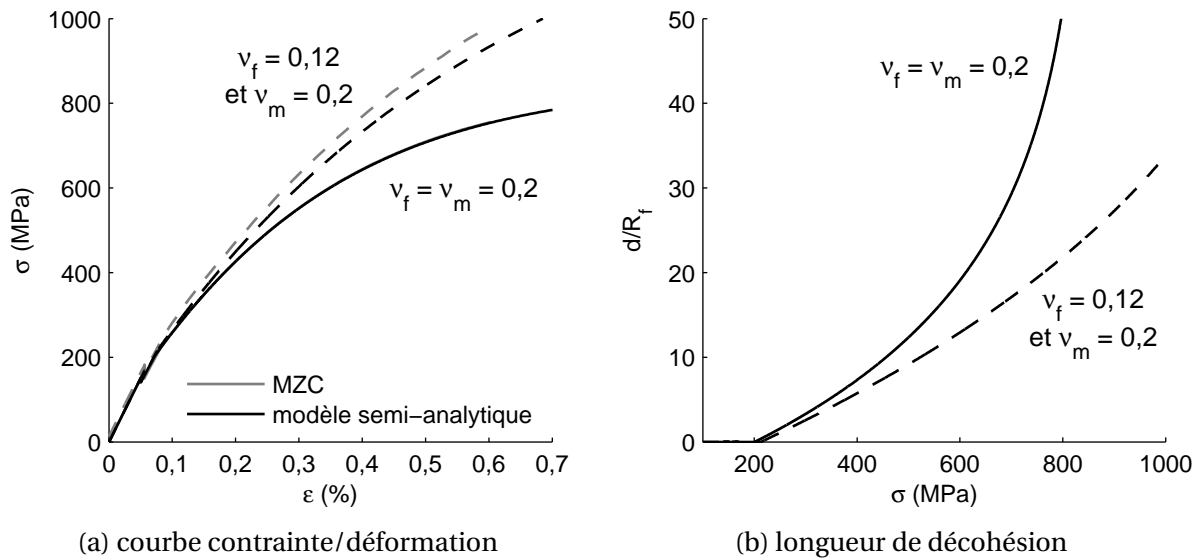


Figure 2.19 – (a) Courbe contrainte/déformation au cours de l'endommagement de la cellule élémentaire (fissuration de la matrice et propagation de la décohésion à l'interface). (b) Evolution de la longueur de décohésion d . Le glissement frottant est pris en compte avec $\mu = 0,4$.

V Ouverture de fissure au cours de la traction monotone

On souhaite également exprimer l'ouverture de la fissure matricielle au sein du minicomposite au cours du chargement en traction. Une expression est développée et les résultats du modèle sont comparés aux calculs numériques.

V.1 Expression semi-analytique

L'ouverture de la fissure matricielle, notée $\Delta U(\sigma, d, \mu)$, dépend de la contrainte appliquée σ , de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ et du coefficient de frottement μ .

Localement, la fissure matricielle ne présente pas une ouverture identique tout le long de la section de matrice (figure 2.20). On souhaite exprimer l'ouverture de fissure moyenne $\Delta U(\sigma, d, \mu)$.

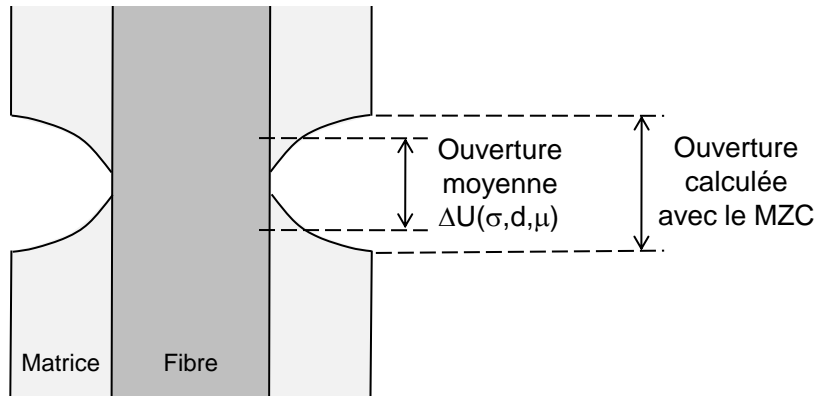


Figure 2.20 – Fissure matricielle au sein de la cellule élémentaire en traction.

L'ouverture de la fissure matricielle s'écrit comme la différence de déplacement axial entre la fibre et la matrice, au niveau de la fissure matricielle. [Hutchinson et Jensen, 1990] proposent une expression de l'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma, d, \mu)$ en fonction de la contrainte appliquée σ et de d telle que

$$\Delta U(\sigma, d, \mu) = (b_2 + b_3) \left\{ \frac{1 - V_f}{V_f} \frac{d(\sigma)}{c_1 c_3} \left(\frac{G_i^c}{E_m R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{R_f \sigma_r^{min}}{\mu b_1^2 E_m} \left[\exp \left(-\mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} \right) + \mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} - 1 \right] \right\},$$

avec $\sigma_r^{min} = a_3 \sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T + b_1 \gamma$

(2.23)

où la décohésion $d(\sigma)$ est écrite par la relation (2.9). Le saut de contrainte axial $\gamma(G_i^c)$ a été défini par l'Équation 2.8. De nombreux coefficients interviennent ($a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, c_1$ et c_3) et peuvent être déterminés à partir des relations de [Hutchinson et Jensen, 1990]. La zone transitoire de redistribution des contraintes n'est cependant pas considérée.

En prenant en compte la zone transitoire de transfert des contraintes, il est possible d'ajouter un terme supplémentaire tel que

$$\Delta U(\sigma, d, \mu) = (b_2 + b_3) \left\{ \frac{1 - V_f}{V_f} \frac{d(\sigma)}{c_1 c_3} \left(\frac{G_i^c}{E_m R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{R_f \sigma_r^{min}}{\mu b_1^2 E_m} \left[\exp \left(-\mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} \right) + \mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} - 1 \right] \right\} + \frac{D_1^0}{1 - V_f} \frac{(\sigma^{ci} + \sigma^T)}{E_m}$$

(2.24)

On note qu'en l'absence de décohésion ($d = 0$), l'ouverture de fissure matricielle peut s'exprimer à partir du coefficient D_1^0 identifié par EF, par la relation

$$\Delta U(\sigma) = \frac{D_1^0}{1 - V_f} \frac{(\sigma + \sigma^T)}{E_m}. \quad (2.25)$$

Lorsque la contrainte appliquée $\sigma = \sigma^{ci}$ au tout début de la propagation de la décohésion, l'ouverture de fissure donnée par la relation (2.25) est identique à (2.24) avec $d = 0$. La continuité entre les deux expressions est donc assurée lors du début de propagation de la décohésion.

V.2 Comparaison avec le Modèle de Zones Cohésives

L'ouverture de fissure matricielle moyenne $\Delta U(\sigma, d, \mu)$, exprimée par l'Équation 2.24, est comparée à l'ouverture de la fissure matricielle calculée numériquement à partir du MZC. Avec le MZC, l'ouverture de la fissure tracée est celle au niveau du bord libre de la fissure matricielle (figure 2.20).

La figure 2.21 montre que **la comparaison entre la relation (2.24) et les valeurs obtenues par le MZC est satisfaisante**. Lorsque les longueurs de décohésion sont grandes, l'effet de la zone transitoire de redistribution des contraintes n'est pas prédominant. La prise en compte de cette zone transitoire a contribué à une bonne corrélation entre les deux calculs.

Le frottement freine l'évolution de la longueur de décohésion et donc l'ouverture de la fissure matricielle.

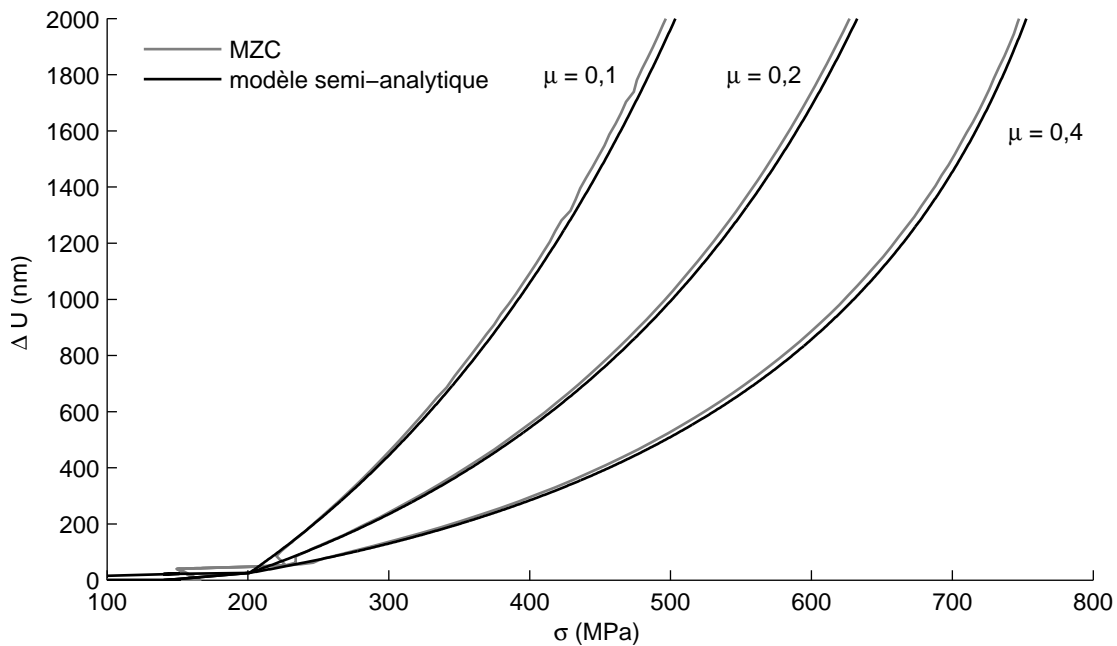


Figure 2.21 – Ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma, d, \mu)$ obtenue par le modèle semi-analytique (Équation 2.24) en fonction de σ . Ces valeurs sont comparées à l'ouverture de la fissure matricielle calculée numériquement à l'aide du MZC.

Au cours de la traction monotone, le frottement conditionne le glissement à l'interface ce qui a une conséquence principalement sur la propagation de la décohésion $d(\sigma)$. La dernière partie de cette analyse est consacrée à la modélisation du comportement au cours des cycles de déchargement/rechargement. La forme des boucles d'hystérésis peut être utilisée pour caractériser l'endommagement interfacial et le comportement frottant.

VI Traction cyclée, modélisation des boucles d'hystérésis

Les boucles d'hystérésis formées lors des cycles déchargement/rechargement, résultent à la fois de l'endommagement du minicomposite et des mécanismes de frottement. Cette analyse des boucles est motivée par la possibilité d'évaluer l'endommagement et le coefficient de frottement à partir d'un essai de traction cyclée.

L'endommagement augmente avec le chargement en traction. Soit σ^p la contrainte axiale appliquée au début du déchargement. Il est supposé qu'aucune fissure matricielle ne se crée au cours du cycle. De même la longueur de décohésion n'augmente pas. Au début du déchargement et au cours du cycle, on considère le minicomposite endommagé avec un pas de fissuration L et une longueur de décohésion d .

Mécanismes de frottement statique

Dans la zone de décohésion interfaciale, la fibre et la matrice sont en contact frottant. Le glissement relatif est contrôlé par la condition de frottement statique. Les deux surfaces en contact conservent le contact sans glissement tant que la contrainte tangentielle τ respecte la condition

$$\tau(r = R_f, z) \leq -\mu_s \sigma_r(r = R_f, z), \quad (2.26)$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et $\sigma_r(r = R_f, z)$ est la contrainte radiale à l'interface. Le coefficient μ_s dépend de la nature des deux surfaces. La relation 2.26 définit un **seuil de glissement**. Dès que cette condition n'est plus satisfaite ($\tau > -\mu_s \sigma_r(r = R_f, z)$), les deux surfaces admettent un glissement relatif et la condition de glissement frottant de Coulomb (2.4) impose

$$\tau(r = R_f, z) = -\mu \sigma_r(r = R_f, z) \quad \text{pour} \quad |z| \leq \frac{d}{2}, \quad (2.27)$$

où le coefficient de frottement μ déjà introduit représente le coefficient de frottement dynamique. On suppose que le coefficient de frottement statique μ_s qui gouverne le comportement frottant est décrit par le coefficient μ , soit $\mu_s \approx \mu$. La longueur de décohésion est supposée constante et la boucle contrainte/déformation dépend de ces mécanismes de glissement frottant entre les deux surfaces à l'interface.

VI.1 Méthode Eléments Finis pour la modélisation des boucles

Une procédure EF est utilisée pour modéliser ces boucles à partir de la contrainte au début du déchargement σ^p , de l'endommagement du minicomposite (pas de fissuration L et longueur de décohésion d), du frottement et des caractéristiques du microcomposite.

La cellule élémentaire 2D représentative de l'endommagement du minicomposite est paramétrée en fonction de L et d (figure 1.18). Le calcul EF est mis en œuvre pour simuler la boucle et la condition de contact frottant est prise en compte (relations 2.26 et 2.27). Les contraintes résiduelles sont toujours modélisées avec une variation de température $\Delta T = -1000^\circ\text{C}$ et les coefficients de dilatation du tableau 1.1. Les résultats numériques sont présentés arbitrairement à partir des conditions aux limites de type I. Une étude détaillée en Annexe D permet d'observer l'influence des caractéristiques du minicomposite et des conditions aux limites employées.

On souhaite simuler plusieurs boucles au cours de la traction du minicomposite. Il faut préalablement déterminer l'endommagement (L et d) pendant le chargement. On considère pour cette étude le comportement en traction monotone du minicomposite au cours de l'amorçage d'une fissure et de la propagation de la décohésion dans une cellule de taille $L = 100 \mu m$ (figure 2.22). Le MZC est utilisé pour cette modélisation et l'évolution de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ en est déduit (tableau 2.2). Ensuite les boucles d'hystérésis sont simulées en fonction de L et d et de la contrainte σ^p appliquée au début du déchargement. Le comportement en traction cyclée est alors reconstitué.

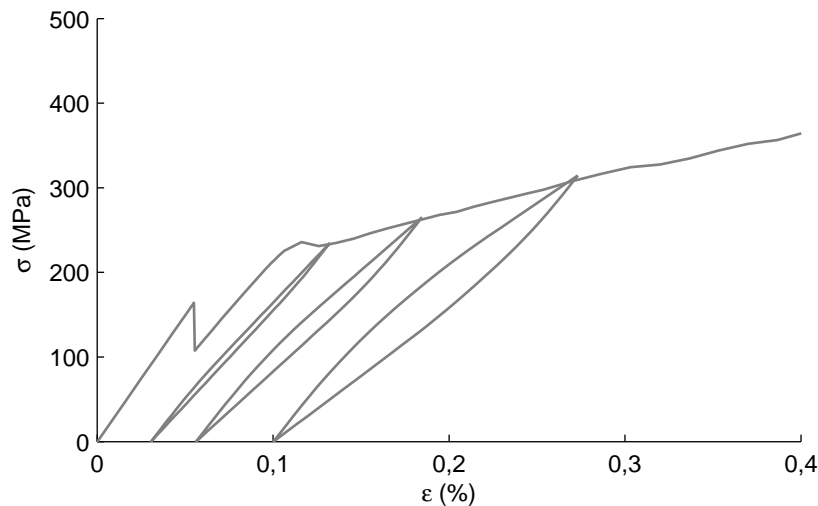


Figure 2.22 – Courbe contrainte/déformation d'un essai de traction cyclée au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans la cellule élémentaire de longueur $L = 100 \mu m$. Le glissement frottant est considéré avec un coefficient de frottement $\mu = 0,2$. L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 J.m^{-2}$.

		$\mu = 0,2$
1ère boucle	$d = 2R_f$	$\sigma^p = 232 MPa$
2ème boucle	$d = 4R_f$	$\sigma^p = 262 MPa$
3ème boucle	$d = 7R_f$	$\sigma^p = 307 MPa$

Tableau 2.2 – Longueur de décohésion d et contrainte σ^p appliquée au début du déchargement pour les trois boucles modélisées figure 2.22.

Cette méthode EF permet d'analyser l'évolution du module tangent au cours du cycle et l'influence des paramètres déjà mentionnés.

VI.2 Caractérisation du module tangent :

Relations avec l'endommagement et le frottement

Longueur de glissement

L'évolution du module tangent au cours de la boucle d'hystérésis résulte de l'endommagement du minicomposite et des mécanismes de frottement statique à l'interface. Le module tangent au début du déchargement est élevé puis décroît au cours du déchargement (figure 2.22). [Vagaggini, Domergue et Evans, 1995] ont proposé de classer les boucles en deux catégories en fonction de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Dans un premier cas (liaison interfaciale faible) elles ont une **forme parabolique**. Dans le cas d'une liaison interfaciale

forte, la forme parabolique de la boucle se termine par une **partie linéaire** comme on peut l'observer sur les simulations (figure 2.22).

Ces auteurs expliquent ces deux comportements différents au cours du déchargement en considérant l'évolution de la longueur de glissement d_{gliss} à l'interface. Au début du déchargement la longueur d_{gliss} est nulle. Puis d_{gliss} s'accroît avec le déchargement entraînant une forme parabolique de la boucle d'hystérésis. Dans le deuxième cas, si au cours du déchargement la longueur de glissement s'accroît jusqu'à atteindre la longueur de décohésion d , alors d_{gliss} devient constante avec $d_{gliss} = d$ jusqu'à la fin du déchargement. Ce mécanisme est à l'origine du comportement linéaire de la boucle lorsque $d_{gliss} = d$.

Module en début et fin de déchargement et de rechargement

En s'appuyant sur les travaux de [Vagaggini et al., 1995], on considère l'inverse du module tangent $\frac{1}{E_{tan}}$ (figure 2.23). La contrainte $\Delta\sigma$ est définie par $\Delta\sigma = \sigma$ au cours du rechargement et $\Delta\sigma = \sigma^p - \sigma$ au cours du déchargement. Le module tangent a été tracé pour les trois boucles modélisées à partir des longueurs de décohésion et des contraintes σ^p différentes (tableau 2.2). Les mécanismes de frottement statique sont à l'origine de l'évolution du module tangent :

1. Le **module tangent au début du déchargement et du rechargement** ($\Delta\sigma = 0$) est identique et indépendant de la longueur de décohésion. [Vagaggini et al., 1995] notent ce module E^* . On peut aussi montrer que ce module tangent E^* ne dépend pas du frottement (Annexe D, figure D-7b).

Au début du déchargement, la longueur de glissement d_{gliss} est nulle et tend à s'accroître. La valeur du module tangent E^* est égale au module élastique du microcomposant contenant les fissures matricielles sans décohésion soit

$$E^* = \frac{E_0}{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}}, \quad (2.28)$$

où D_1^0 est le coefficient identifié par EF précédemment (figure 1.5). **E^* dépend bien uniquement du pas de fissuration matricielle L .**

2. Le **module tangent est décroissant** avec $\Delta\sigma$ (l'inverse du module est croissant) jusqu'à une certaine valeur de $\Delta\sigma$ puis devient constant. Ce comportement caractérise la forme de la boucle : la boucle est parabolique lorsque le module tangent est décroissant puis elle devient linéaire lorsque le module tangent est constant. Cela s'explique en considérant l'évolution de la longueur de glissement au cours du déchargement ou rechargement. Cette longueur de glissement s'accroît jusqu'à ce qu'elle atteigne la longueur de décohésion.

On observe que **l'évolution du module tangent E_{tan} , pour la partie parabolique de la boucle, est indépendante de la longueur de décohésion d et de la contrainte σ^p appliquée au début du déchargement** (figure 2.23). En effet les boucles analysées figure 2.23 sont modélisées pour plusieurs valeurs de d et de σ^p . Seuls le **frottement** et la densité de fissures matricielles modifient cette évolution du module tangent. La contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire dépend de l'endommagement et du frottement.

3. Le **module tangent en fin de déchargement ou de rechargement**, qui caractérise alors la **partie linéaire de la boucle**, dépend de la longueur de décohésion. Ce module noté

E^p peut être approximé par le module élastique du minicomposite exprimé en fonction du pas de fissuration et de la longueur de décohésion par

$$E^p \approx E(L, d) \quad \text{soit} \quad E^p \approx \frac{E_0}{1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L}}. \quad (2.29)$$

Le coefficient $D_1(L, d)$ (relation 1.33) décrit la perte de rigidité résultant de l'endommagement. Le frottement est responsable de l'écart entre ces modules tangents et le module E^p (au plus 10 % pour le minicomposite étudié).

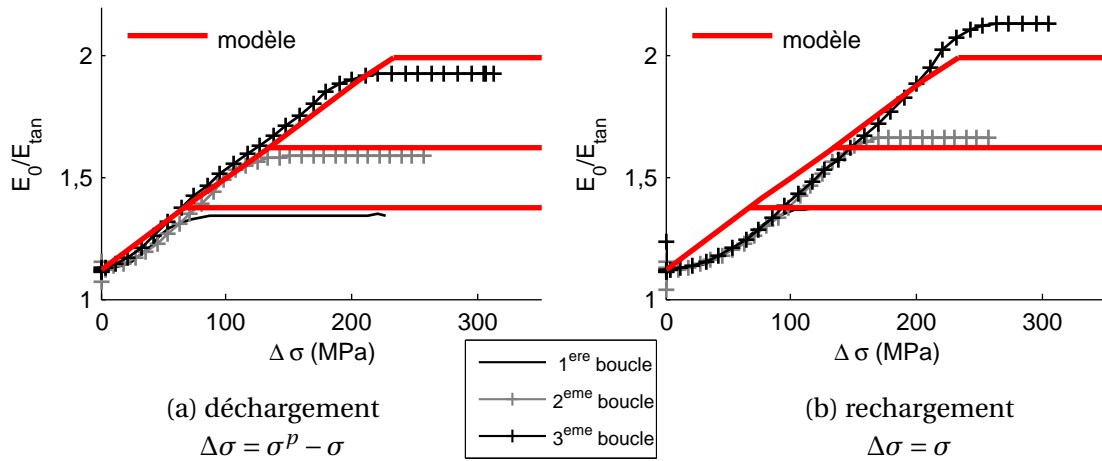


Figure 2.23 – Module tangent au cours des cycles de déchargement (a) puis de rechargement (b). Le coefficient de frottement $\mu = 0,2$. La contrainte σ^p au début du déchargement est donnée dans le tableau 2.2. La pente de la droite linéaire est notée $\frac{E_0}{2\mathcal{L}}$ et le paramètre $\mathcal{L} = 1,25.10^{19} Pa^2$ pour $\mu = 0,2$.

Le frottement influence principalement la vitesse de diminution du module tangent vers la valeur E^p : si le coefficient de frottement est très élevé ($\mu \rightarrow \infty$) l'adhérence à l'interface est toujours conservée quelque soit le chargement et le microcomposite se comporte comme si seules les fissures matricielles existent. Le déchargement et rechargement sont alors élastiques de module E^* . Si au contraire le glissement se produit sans frottement ($\mu = 0$), le comportement au cours du cycle est linéaire gouverné par le module élastique $E^p = E(L, d)$.

L'influence de la longueur de décohésion sur les boucles d'hystérésis a été analysée. Une **étude de sensibilité** des caractéristiques du minicomposite sur les boucles d'hystérésis et l'évolution du module tangent **est présentée en Annexe D**. Le type de conditions aux limites (CL I ou CL II), le coefficient de frottement μ et le pas de fissuration L sont considérés.

La diminution du module tangent avec le chargement, qui caractérise le comportement parabolique de la boucle, dépend uniquement du frottement à l'interface et de la densité de fissuration matricielle. La contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire de la boucle dépend en plus de la longueur de décohésion d . On propose une modélisation du module tangent en fonction du chargement, du coefficient de frottement μ et de l'endommagement. On en déduira une expression du comportement σ/ε au cours de la boucle.

VI.3 Loi d'évolution du module tangent et des boucles d'hystérésis

Module tangent

L'inverse du module tangent $\frac{E_0}{E_{tan}}$ est croissant avec la contrainte $\Delta\sigma$ (figure 2.23). On note σ^t la contrainte de transition entre le domaine croissant de $\frac{E_0}{E_{tan}}$ et le domaine constant. La contrainte σ^t marque alors la transition entre la boucle parabolique et linéaire. La valeur du module tangent lorsque la contrainte $\Delta\sigma > \sigma^t$ est approchée par le module E^p . On propose de modéliser $\frac{E_0}{E_{tan}}$ en fonction de $\Delta\sigma$ de manière bilinéaire (figure 2.23) :

1. si $\Delta\sigma < \sigma^t$, on note $\frac{E_0}{2\mathcal{L}}$ la pente de la droite $\frac{E_0}{E_{tan}}$ en fonction de $\Delta\sigma$. Le paramètre $\mathcal{L} (Pa^2)$ est évalué graphiquement à partir de la figure 2.23. D'autre part, au début du déchargement ou du rechargement, lorsque $\Delta\sigma = 0$, le module tangent $E_{tan} = E^*$.
L'évolution de l'inverse du module tangent peut être décrite par $\frac{E_0}{E_{tan}} = \frac{E_0}{2\mathcal{L}}\Delta\sigma + \frac{E_0}{E^*}$.
2. lorsque $\Delta\sigma > \sigma^t$, alors $\frac{E_0}{E_{tan}} = \frac{E_0}{E^p}$.

Le **paramètre** $\mathcal{L}(\mu, L)$ ne dépend pas de la longueur de décohesion mais uniquement du coefficient de frottement μ , du pas de fissuration L et des caractéristiques du minicomposite.

Modèle de comportement du minicomposite au cours de la boucle

La modélisation du module tangent présentée précédemment peut permettre d'exprimer le comportement du minicomposite au cours de la boucle (Annexe D). La contrainte appliquée et la déformation au début du déchargement sont notées σ^p et ε^p . La déformation $\varepsilon(\sigma)$ s'exprime en fonction de la contrainte appliquée σ au cours de la boucle par

$$\begin{aligned}
 \text{déchargement} \quad & \begin{cases} \varepsilon(\sigma) = \varepsilon^p - \mathcal{L}(\sigma^p - \sigma)^2 - \frac{1}{E^*}(\sigma^p - \sigma) & \text{si } \sigma \geq \sigma^p - \sigma^t \\ \varepsilon(\sigma) = -\frac{1}{E^p}((\sigma^p - \sigma^t) - \sigma) + \varepsilon^p - \varepsilon^t & \text{si } \sigma \leq \sigma^p - \sigma^t \end{cases} \\
 \text{rechargement} \quad & \begin{cases} \varepsilon(\sigma) = \mathcal{L}(\sigma^p)^2 + \frac{1}{E^*}\sigma^p + \varepsilon_{r,total} & \text{si } \sigma \leq \sigma^t \\ \varepsilon(\sigma) = \frac{1}{E^p}(\sigma - \sigma^t) + \varepsilon^t + \varepsilon_{r,total} & \text{si } \sigma \geq \sigma^t, \end{cases} \\
 \text{avec} \quad & \sigma^t = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{1}{2\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \varepsilon^t = \mathcal{L}(\sigma^t)^2 + \frac{1}{E^*}\sigma^t.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

La déformation $\varepsilon_{r,total}$ est la déformation résiduelle totale (figure 2.25b) et peut s'exprimer par (Annexe D)

$$\varepsilon_{r,total} = \varepsilon_r(L, d, \mu) + \varepsilon_{r,boucle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_r(L, d, \mu) = \varepsilon^p - \frac{\sigma^p}{E^p} \\ \varepsilon_{r,boucle} = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right)^2 \frac{1}{4\mathcal{L}} \end{cases}. \tag{2.31}$$

En l'absence de frottement, le comportement au cours du déchargement est linéaire et caractérisé par le module élastique $E(L, d) = E^p$. Les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ qui en résultent dépendent de l'ouverture de la fissure matricielle induite par l'endommagement et des contraintes résiduelles.

On note qu'il est possible d'exprimer l'ouverture de la boucle $\delta\varepsilon_{max}$ à mi-hauteur qui est obtenue pour une contrainte appliquée $\sigma = \frac{\sigma^p}{2}$ (Annexe D) avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta\varepsilon_{max} = \left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E^*} \right)^2 \frac{1}{4\mathcal{L}} & \text{si } \sigma^t \leq \frac{\sigma^p}{2} \\ \delta\varepsilon_{max} = \left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E^*} \right)^2 \frac{1}{4\mathcal{L}} - 2\mathcal{L} \left(\sigma^t - \frac{\sigma^p}{2} \right)^2 & \text{si } \sigma^t > \frac{\sigma^p}{2} \end{array} \right. . \quad (2.32)$$

Après avoir identifié le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$ en fonction du coefficient de frottement μ et du pas de fissuration L , le comportement σ/ε au cours des boucles est facilement modélisé par les relations 2.30 à partir de la longueur de décohésion d et de la contrainte σ^p appliquée au début du déchargement. La figure 2.24 montre un bon accord avec les résultats EF.

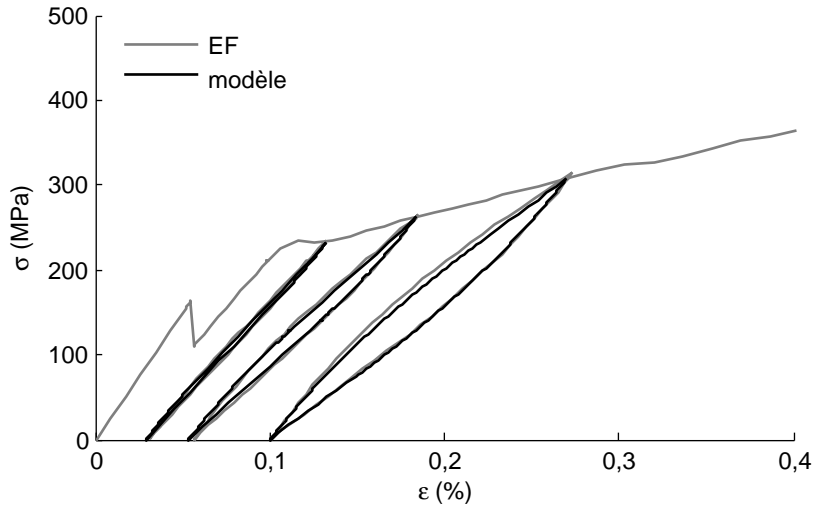


Figure 2.24 – Courbe contrainte/déformation d'un essai de traction cyclée au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans la cellule de longueur $L = 100 \mu m$. Le glissement frottant est considéré avec un coefficient de frottement $\mu = 0,2$. L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 J.m^{-2}$. La courbe enveloppe (traction monotone) est obtenue à partir du MZC. Les boucles sont modélisées séparément, par calcul EF d'une part et à l'aide des relations 2.30.

VI.4 Bilan

Module tangent, forme des boucles, frottement

La figure 2.25 résume l'analyse de la boucle d'hystérésis :

- Le module E^* dépend du pas de fissuration L (2.28).
- Le module E^p , qui caractérise la partie linéaire de la boucle d'hystérésis, s'exprime en fonction du pas de fissuration L et de la longueur de décohésion d (2.29).
- Le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$, indépendant de d , peut être déterminé à partir de l'inverse du module tangent en fonction du coefficient de frottement μ (figure 2.23).
- Il est alors possible de modéliser les boucles à l'aide des relations (2.30).
L'ouverture de la boucle à mi-hauteur $\delta\varepsilon_{max}$ est décrite avec la relation (2.32) en fonction de l'endommagement et du paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$.
Les déformations résiduelles supplémentaires engendrées par le déchargement avec frottement sont aussi écrites à partir de l'endommagement et de $\mathcal{L}(\mu, L)$.

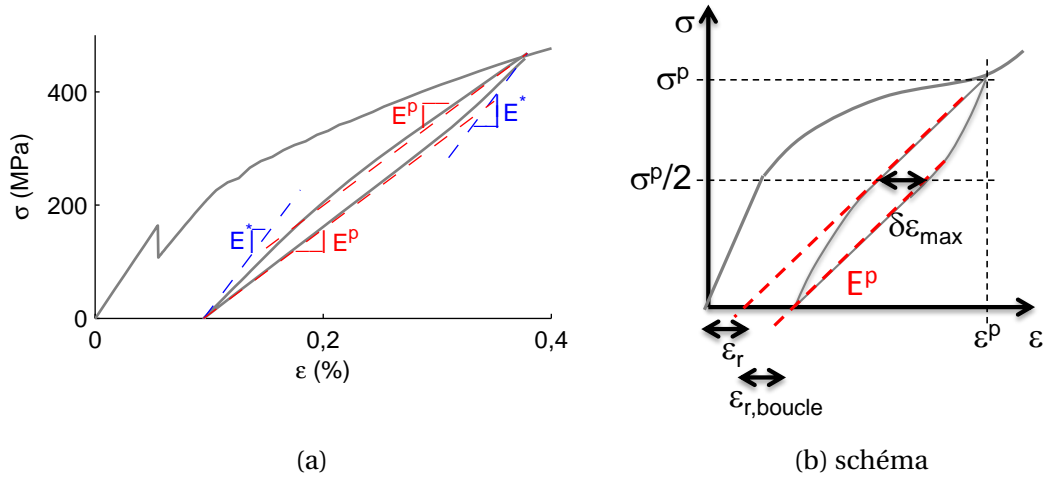


Figure 2.25 – Caractérisation du module tangent au cours des boucles. (a) E^* est le module au début du déchargement et du rechargement. Le module en fin de déchargement et de rechargement est approché par E^P . (b) Les déformations résiduelles sont la somme de ε_r qui dépend de l'endommagement et des contraintes résiduelles et de $\varepsilon_{r,boucle}$ qui résulte du comportement frottant au cours des boucles.

Il est possible d'évaluer l'endommagement et le coefficient de frottement à partir des boucles d'hystérésis. Le pas de fissuration matricielle peut être déduit du module E^* , la longueur de décohésion de E^P et le coefficient de dilatation μ du paramètre \mathcal{L} :

1. Le module E^P peut être déterminé facilement en traçant le module tangent au cours des boucles. Le module devient constant en fin de chargement et égal à E^P .
2. Le module E^* est moins simple à déterminer. Pour cela il faut considérer le module tangent en début de déchargement ou de rechargement. Celui-ci décroît très rapidement avec la contrainte appliquée. L'évolution des modules tangents E_{tan} est obtenue à partir des boucles d'hystérésis modélisées par EF. De petits incréments de chargement ont été imposés pour pouvoir identifier le module E^* (figure 2.23). On peut aussi tracer le module tangent des boucles d'hystérésis obtenues par les essais de traction cyclée sur minicomposite, et estimer le module E^* .

Pour cela, on considère l'inverse du module tangent $\frac{1}{E_{tan}}$ en fonction de la contrainte $\Delta\sigma$ (figure 2.23). La contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire de la boucle est notée σ^t . Pour une contrainte $\Delta\sigma < \sigma^t$, la boucle est parabolique et l'inverse du module tangent $\frac{1}{E_{tan}}$ peut être approximé par une droite de pente $\frac{1}{2\mathcal{L}}$. Cette droite coupe alors l'axe des ordonnées en $\frac{1}{E^*}$. Cela permet donc d'évaluer le module E^* , puis d'en déduire le pas de fissuration L à partir du module E^* .

3. Pour finir, le coefficient de frottement μ peut être estimé par calculs EF à partir de la connaissance du paramètre \mathcal{L} et du pas de fissuration L . Ce paramètre \mathcal{L} peut être déterminé en traçant l'évolution de l'inverse du module tangent $\frac{1}{E_{tan}}$ en fonction de la contrainte appliquée. L'évolution de l'inverse du module tangent est supposée linéaire si $\Delta\sigma < \sigma^t$, la contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire de la boucle. La valeur $\frac{1}{2\mathcal{L}}$ représente la pente de cette droite linéaire. On note également qu'il est possible d'évaluer \mathcal{L} en calculant l'ouverture des boucles d'hystérésis $\delta\varepsilon_{max}$ à mi-hauteur et en utilisant l'expression de $\delta\varepsilon_{max}$ (2.32).

Module élastique et déformations résiduelles apparentes

Le module E^p correspond au module tangent en fin de rechargement. Il est donc égal au module élastique du minicomposite contenant la fissure matricielle et la décohésion interfaciale, **sans frottement** (figure 2.25b). On peut écrire $E^p \approx E(L, d)$.

On considère le minicomposite sollicité en traction monotone, avec une déformation axiale appliquée ε et une contrainte axiale σ . La déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$ a été exprimée en fonction de la longueur de décohésion et de la contrainte appliquée par l'Équation 2.15. Cette relation dépend du coefficient de frottement μ .

A partir de l'analyse des boucles d'hystérésis, on peut définir le **module élastique apparent** comme étant le module $E(L, d)$. Les **déformations résiduelles apparentes**, notées ε_r , peuvent être calculées par

$$\varepsilon_r(\sigma, L, d) = \varepsilon(\sigma, L, d) - \frac{\sigma}{E(L, d)}, \quad (2.33)$$

où $\varepsilon(\sigma, d)$ est écrite par la relation 2.15. Ces déformations résiduelles apparentes dépendent alors du coefficient de frottement μ en plus des contraintes résiduelles. Les déformations résiduelles, notées $\varepsilon_{r,boucle}$ ne sont pas considérées (figure 2.25b).

Les déformations résiduelles apparentes $\varepsilon_r(\sigma, L, d)$ sont bien moins élevées que les déformations résiduelles du minicomposite en l'absence de frottement (figure 2.26). De plus, elles ne sont plus forcément croissantes avec le chargement en traction.

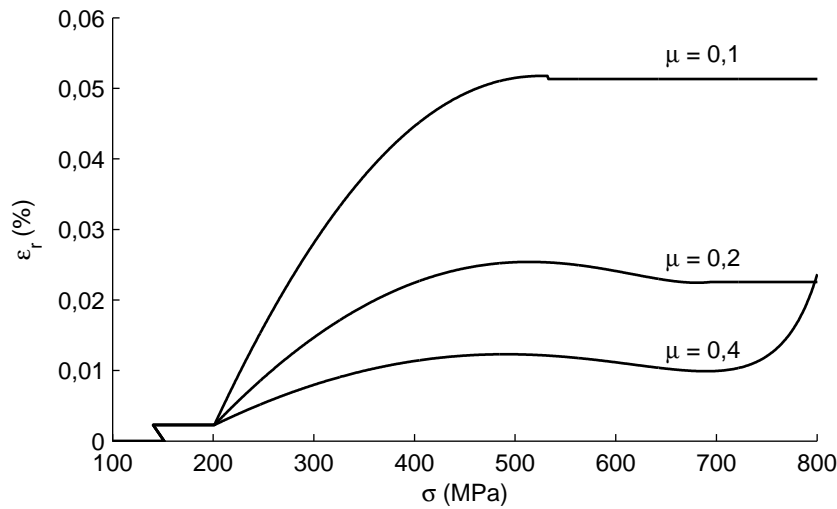


Figure 2.26 – Evolution des déformations résiduelles apparentes du minicomposite en traction monotone, lors de l'amorçage d'une fissure matricielle et de la propagation de la décohésion. La taille de la cellule élémentaire est $L = 400 \mu m$. Trois valeurs du coefficient de frottement μ sont étudiées.

Si les longueurs de décohésion sont grandes et si le coefficient de frottement est élevé, il est même possible que ces déformations résiduelles apparentes soient négatives. Cela avait également été observé avec le modèle de rechargement linéaire (2.22, p. 93).

Conclusion

Le comportement du minicomposite en traction a été modélisé lors de la fissuration matricielle et de la décohésion interfaciale en prenant en compte le glissement frottant. L'amorçage d'une fissure matricielle est étudié au sein d'une cellule élémentaire de longueur L .

Un modèle semi-analytique a été développé. Le début de propagation de la décohésion est gouverné par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . L'interface frottante est caractérisée par le frottement de Coulomb à partir du coefficient de frottement μ . De plus, la zone transitoire de rechargement des contraintes au voisinage du front de décohésion est modélisée. On souhaite ainsi décrire de façon réaliste la répartition des contraintes au sein du minicomposite endommagé.

D'abord, l'évolution de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ en fonction de la contrainte axiale σ s'exprime par

$$\frac{d(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\mu b_1} \ln \left[\frac{1}{k_1 + 1} \frac{\sigma_{contact} - \sigma^{ci} + k_1 (\sigma_{contact} - \sigma)}{\sigma_{contact} - \sigma} \right] \quad (2.34)$$

$$\text{avec } \sigma^{ci} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T \quad \text{et} \quad \sigma_{contact} = \frac{(1 - a_1 V_f)(a_4 - a_2 b_1)}{a_2 (b_1 (1 - a_1 V_f) + a_3 V_f)} \sigma^T.$$

Le début de la propagation est observé lorsque la contrainte appliquée σ atteint la contrainte σ^{ci} qui dépend de G_i^c . La contrainte notée $\sigma_{contact}$ est le chargement axial tel que la matrice et la fibre ne soient plus en contact, dans la zone de décohésion. La décohésion atteint une valeur très élevée lorsque la contrainte axiale σ tend vers $\sigma_{contact}$.

La **déformation axiale** $\varepsilon(\sigma, L, d)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma, L, d) = \frac{\sigma}{E_0} - \frac{1}{b_1} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} \right) \frac{d}{L} + \frac{R_f}{\mu b_1^2 L} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} + b_1 \frac{\gamma}{E_f} \right) \left(1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right) \\ + D_1^0 \frac{R_f}{L} \frac{\sigma^{ci} + \sigma^T}{E_0} \left(1 - \frac{d}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

où la décohésion $d(\sigma)$ est déterminée d'après la relation (2.34). Le saut de contrainte axial γ supporté par la fibre au niveau du front de décohésion s'écrit

$$\gamma(G_i^c) = \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

De plus, l'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma, d, \mu)$ a aussi été exprimée par

$$\begin{aligned} \Delta U(\sigma, d, \mu) = (b_2 + b_3) \left\{ \frac{1 - V_f}{V_f} \frac{d(\sigma)}{c_1 c_3} \left(\frac{G_i^c}{E_m R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{R_f \sigma_r^{min}}{\mu b_1^2 E_m} \left[\exp \left(-\mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} \right) + \mu b_1 \frac{d(\sigma)}{R_f} - 1 \right] \right\} \\ + \frac{D_1^0}{1 - V_f} \frac{(\sigma^{ci} + \sigma^T)}{E_m} \\ \text{avec } \sigma_r^{min} = a_3 \sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T + b_1 \gamma \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ces expressions nécessitent de calculer initialement d'abord les coefficients répertoriés dans le [tableau 2.3](#) à partir des caractéristiques du minicomposite et des propriétés des fibres et de la matrice. Seul le coefficient D_1^0 est identifié par calculs EF. Les autres sont calculés à partir des relations analytiques de [Hutchinson et Jensen, 1990].

Caractéristiques du microcomposite	
Propriétés mécaniques	Contraintes résiduelles
$\mathcal{P} = \{E_f, E_m, \nu_f, \nu_m, R_f, V_f\}$	$\mathcal{T} = \{\alpha_z^f, \alpha_z^m, \alpha_r^f, \alpha_r^m, \Delta T\}$
Coefficients de [Hutchinson et Jensen, 1990]	
$a_1(\mathcal{P}), a_2(\mathcal{P}, \mathcal{T}), a_3(\mathcal{P}), a_4(\mathcal{P}, \mathcal{T})$	
$c_1(\mathcal{P}), c_3(\mathcal{P})$	
$b_1(\mathcal{P}, \mathcal{T}), b_2(\mathcal{P}, \mathcal{T}), b_3(\mathcal{P}, \mathcal{T}), k_1(\mathcal{P}, \mathcal{T})$	
Coefficient identifié par analyse EF	
$D_1^0(\mathcal{P})$ perte de rigidité liée à la fissuration matricielle	

Tableau 2.3 – Coefficients utilisés dans les équations du modèle semi-analytique.

L'effet de la zone transitoire de rechargement des contraintes est paramétré par le coefficient D_1^0 .

Le frottement a pour conséquence principale de ralentir la propagation de la décohésion. L'intensité du frottement dépend du coefficient de frottement mais aussi des contraintes radiales. Le frottement est donc plus intense si les contraintes résiduelles sont élevées.

On a aussi pu observer que le type de conditions aux limites CL I ou CL II modifie considérablement l'évolution de la décohésion. Les coefficients du [tableau 2.3](#) s'expriment différemment avec les CL I ou les CL II. Les valeurs des coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice sont également importants.

Parallèlement à ce modèle analytique, le **modèle de zones cohésives** développé précédemment a été enrichi pour prendre en compte le glissement frottant par la loi de Coulomb. La réponse en traction et l'évolution de l'ouverture de fissure obtenue ont été comparées aux résultats du modèle semi-analytique. Les comparaisons sont satisfaisantes.

Enfin, les **boucles d'hystérésis** ont été analysées. Ces boucles résultent des cycles de chargement et rechargement. Le module tangent noté E^* au début du déchargement ou du rechargement correspond au module élastique du minicomposite contenant uniquement les fissures matricielles. Le module tangent noté E^p en fin de déchargement ou de rechargement correspond au module élastique du minicomposite contenant les fissures matricielles et la décohésion. E^p est indépendant du frottement.

Le chapitre suivant est consacré au comportement en traction du microcomposite en ajoutant la multifissuration de la matrice dans le modèle.

Bibliographie

- AVESTON, J., G. A. COPPER et A. KELLY. 1971, «The properties of fiber composites», *IPC Science and Technology Press Ltd, Paper I, Conference Proceeding, National Physical Laboratory*, p. 15–26.
- CASTELIER, E., L. GÉLÉBART, L. C. et C. LANTUÉJOUL. 2010, «Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites», *Composites Science and Technology*, vol. 70, n° 15, p. 2146–2153. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.08.014>.
- CHABOCHE, J.-L., R. GIRARD et A. SCHAFF. 1997, «Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models», *Computational Mechanics*, vol. 20, n° 1-2, p. 3–11. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s004660050209>.
- COX, H. J. 1952, «The elasticity and strength of paper and other fibrous materials», *Brit. J. Appl. Phys.*, vol. 3, n° 3, p. 72–79. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0508-3443/3/3/302>.
- CURTIN, W. A. et B. K. AHN. 1997, «Strain and hysteresis by stochastic matrix cracking in ceramic matrix composites», *J. Mech. Phys. Solids.*, vol. 45, n° 2, p. 177–209. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096\(96\)00081-6](http://dx.doi.org/10.1016/s0022-5096(96)00081-6).
- GRACIANI, E., V. MANTIC, F. PARÌS et J. VARNA. 2009, «Numerical analysis of debond propagation in the single fibre fragmentation test», *Composites Science and Technology*, vol. 69, n° 15-16, p. 2514–2520. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.07.006>.
- GUILLAUMAT, L. 1994, *Microfissuration des CMC : Relations avec la microstructure et le comportement mécanique*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/1994B0R10546>.
- HUI, C.-Y., S. L. PHOENIX et D. SHIA. 1997, «The single-filament-composite test : A new statistical theory for estimating the interfacial shear strength and weibull parameters for fiber strength», *Composites Science and Technology*, vol. 57, n° 12, p. 1707–1725. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538\(97\)00103-6](http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538(97)00103-6).
- HUTCHINSON, J. W. et H. M. JENSEN. 1990, «Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction», *Mechanics of Materials*, vol. 9, n° 2, p. 139–163. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90037-g](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(90)90037-g).
- KIM, J. K. et Y. W. MAI. 1998, «Engineered interfaces in fiber reinforced composites (chapitre 3, page 62, table 3.1)», *Elsevier*.
- LAMON, J., F. REBILLAT et A. G. EVANS. «Microcomposite test procedure for evaluating the interface properties of ceramic matrix composites», *J. Am Ceram. Soc.*, vol. 78, n° 2.
- LEBRUN, G.-A. 1996, *Comportement thermomécanique et durée de vie de composites à matrice céramique : théorie et expérience*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/1996B0R10711>.
- LISSART, N. et J. LAMON. «Damage and failure in ceramic matrix composites : experimental study and model», *Acta Mater.*, vol. 45.
- MARSHALL, D. B. 1992, «Analysis of fiber debonding and sliding experiments in brittle matrix composites», *Acta metall. mater.*, vol. 40, n° 3, p. 427–441. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0956-7151\(92\)90391-q](http://dx.doi.org/10.1016/0956-7151(92)90391-q).

- MARSHALL, D. B., B. N. COX et A. G. EVANS. 1985, «The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites», *Acta metall. mater.*, vol. 33, n° 11, p. 2013–2021. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90124-5](http://dx.doi.org/10.1016/0001-6160(85)90124-5).
- MC CARTNEY, L. N. 1989, «New theoretical model of stress transfert between fiber and matrix in a uniaxially fiber-reinforced composite», *Proc. Royal Soc. London A*, vol. 425, n° 1868, p. 215–244. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1989.0104>.
- MONERIE, Y. 2000, *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre-matrice*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2000AIX22054>.
- NAIRN, J. A. 1997, «On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites», *Mechanics of Materials*, vol. 26, n° 2, p. 63–80. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6636\(97\)00023-9](http://dx.doi.org/10.1016/s0167-6636(97)00023-9).
- NAIRN, J. A. et Y. C. LIU. 1997, «Stress transfer into a fragmented anisotropic fiber through an imperfect interface», *Int. J. Solids Structures*, vol. 34, n° 10, p. 1255–1281. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0020-7683\(96\)00065-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0020-7683(96)00065-0).
- OLIVIER, C. 1998, *Elaboration et étude du comportement mécanique de composites unidirectionnels C/Si₃N₄ et SiC/Si₃N₄*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon. URL <http://www.theses.fr/1998ISAL0035>.
- REYNAUD, P., D. ROUBY et G. FANTOZZI. 1993, «Analyse micromécanique de la fatigue des composites céramique-céramique», *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, vol. 3 (n° hors série), p. 191–206.
- SMITH, G. E. et A. J. M. SPENCER. 1970, «Interfacial tractions in a fibre-reinforced elastic composite material», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 18, n° 2, p. 81–100. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096\(70\)90027-x](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(70)90027-x).
- SUN, C. T. et W. QUIAN. 1998, «A treatment of interfacial cracks in the presence of friction», *Int. J. Fracture*, vol. 94, p. 371–382. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-4489-6_9.
- TVERGAARD, V. 1990, «Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal», *Materials Science and Engng A*, vol. 125, n° 2, p. 203–213. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093\(90\)90170-8](http://dx.doi.org/10.1016/0921-5093(90)90170-8).
- VAGAGGINI, E., J. DOMERGUE et A. G. EVANS. 1995, «Relationships between hysteresis measurements and the constituent properties of ceramic matrix composites : I, Theory», *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 78, n° 10, p. 2709–2720. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1151-2916.1995.tb08046.x>.

Chapitre 3

Modèle de comportement en traction d'un minicomposite SiC/SiC

Sommaire

Introduction	112
I Multifissuration du minicomposite en traction : modèle par tirages aléatoires	113
I.1 Schéma de résolution de la multifissuration du minicomposite	114
Nombre de fissures matricielles amorcées au cours du charge- ment en traction	114
Réponse en traction à déformation imposée	114
Effet d'écran, saturation de l'endommagement	114
I.2 Comparaison avec le modèle de zones cohésives	115
Caractéristiques de la cellule élémentaire étudiée	115
Utilisation du modèle de zones cohésives (MZC)	115
Comparaison	115
I.3 Influence de la longueur du minicomposite	116
I.4 Probabilité de rupture d'un volume de matrice	117
Approche par volumes élémentaires indépendants	117
Approche itérative	118
I.5 Comportement en traction avec la loi statistique pour la multifissu- ration de la matrice	119
Taille des blocs de matrice	120
Approche itérative	120
II Comportement moyen et expression de la densité de fissuration	121
II.1 Expression de la densité de fissures matricielles	121
Bilan	124
II.2 Comparaison avec des précédents modèles statistiques	124
Deux modèles statistiques de la multifissuration de la matrice	124
Comparaison de la réponse en traction	125
II.3 Influence des propriétés sur le comportement en traction	126
Microcomposite ou minicomposite	126
Distribution des contraintes à rupture	129
Propriétés de l'interface	130
Fraction volumique de fibres	131

II.4	Bilan	132
III	Identification de l'énergie à rupture de l'interface, du coefficient de frottement et des paramètres de la loi de fissuration matricielle	133
III.1	Essais de traction sur minicomposites	133
	Caractéristiques des minicomposites élaborés	133
	Estimation des surfaces de fibres et de matrice sur une section de minicomposite	133
	Estimation de l'évolution de la densité de fissuration au cours des essais de traction sur les minicomposites	134
III.2	Identification des propriétés	135
	Méthodes d'identification	136
	Comparaison essais/modèle, propriétés identifiées	137
IV	Ouvertures de fissures	138
	Conclusion	139
	Bibliographie	140

Introduction

L'amorçage de la fissure matricielle et la propagation de la décohésion au sein du minicomposite en traction ont été décrits. L'amorçage de la fissure matricielle est piloté par la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} . La propagation de la décohésion est régie par la ténacité interfaciale G_i^c et le coefficient de frottement μ . Le glissement frottant a déjà été analysé en tenant compte de la présence des contraintes résiduelles.

Des expressions semi-analytiques sont développées pour modéliser l'évolution de la décohésion interfaciale et le comportement en traction (chapitre 3). La multifissuration de la matrice est en partie responsable de la non-linéarité de la courbe de comportement. Ce chapitre est consacré à la **multifissuration de la matrice**. On souhaite modéliser le comportement en traction en prenant en compte l'évolution de la densité de fissuration matricielle. Les résultats obtenus par le modèle du minicomposite sont comparés aux essais de traction sur minicomposite.

Une **loi statistique** est utilisée pour l'étude de la multifissuration de la matrice. Les valeurs de la contrainte σ_{max} , supportée par la matrice lors de l'amorçage de la fissure matricielle, dépendent alors de la loi statistique. La loi de Weibull est employée. Le comportement en traction, ainsi que la densité de fissures matricielles, résultent des tirages aléatoires des contraintes σ_{max} dans la matrice.

La densité de fissuration matricielle est pilotée à la fois par les paramètres de la loi statistique, mais aussi par la propagation de la décohésion. On propose une **expression analytique de l'évolution de la densité de fissures matricielles** avec le chargement de traction. Une comparaison est faite avec les résultats des algorithmes déjà existants.

Le modèle semi-analytique est alors complété par l'expression de la densité de fissures matricielles. Le comportement en traction obtenu avec ce modèle est comparé avec les essais de traction sur minicomposite. L'énergie de rupture de l'interface G_i^c , le coefficient de frottement μ ainsi que les propriétés de la loi statistique sont identifiés.

Enfin, les **ouvertures de fissures** ont été exprimées au chapitre précédent en fonction du chargement de traction, des longueurs de décohésion et du coefficient de frottement. L'évolution des ouvertures de fissures est comparée aux mesures expérimentales.

Au final, la décohésion interfaciale, la densité de fissures matricielles et les ouvertures de fissures dans le minicomposite en traction sont entièrement exprimées à l'aide des relations semi-analytiques. Les données d'entrée pour ces expressions sont les propriétés des fibres, de la matrice et de l'interface. Les comparaisons avec les essais de traction sur minicomposite permettent d'identifier les valeurs de G_i^c , de μ et les paramètres de la loi statistique.

I Multifissuration du minicomposite en traction : modèle par tirages aléatoires

L'amorçage de la fissure matricielle dans le minicomposite en traction est gouverné par la contrainte axiale dans la matrice, notée σ_{max} . On propose de simuler les amorçages successifs des fissures matricielles en discrétisant la matrice en plusieurs blocs de même longueur (figure 3.1).

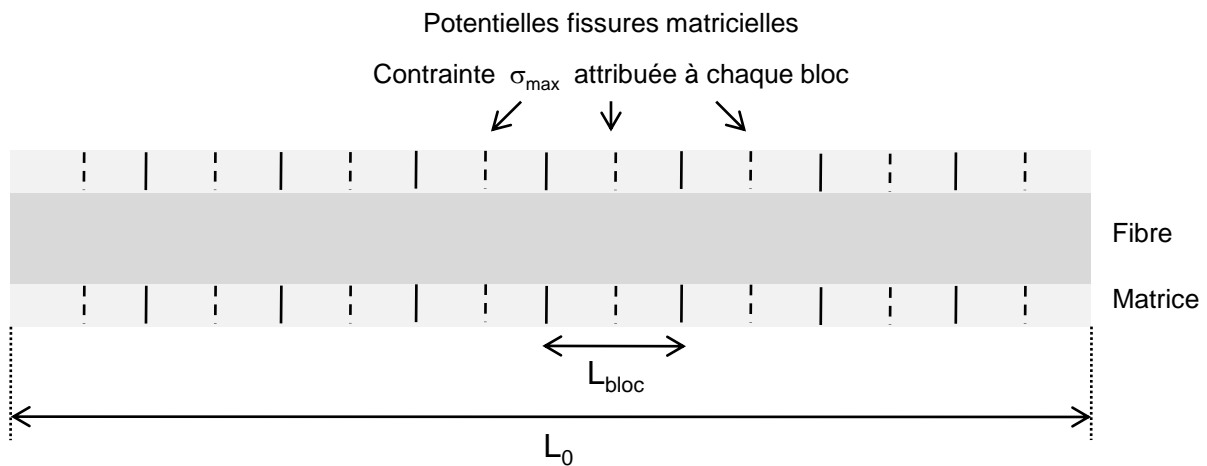


Figure 3.1 – Cellule élémentaire du minicomposite et discrétisation de la matrice en blocs de même longueur.

Dans chacun de ces blocs, l'amorçage d'une fissure dépend de la valeur de la contrainte σ_{max} attribuée au bloc. Les **fissures potentielles de la matrice** dans ces blocs peuvent donc être créées si la contrainte axiale de la matrice atteint σ_{max} au cours du chargement en traction.

Plan de cette partie

D'abord on propose un algorithme pour modéliser l'évolution du nombre de fissures dans le minicomposite en traction, en fonction de la distribution des contraintes σ_{max} attribuées aux blocs de matrice. La propagation de la décohésion est prise en compte. La réponse en traction est déterminée à l'aide des expressions semi-analytiques déjà développées au cours du chapitre 2.

Les résultats obtenus sont comparés à la réponse en traction calculée numériquement à l'aide du modèle de zones cohésives. Quelques fissures matricielles sont créées dans la cellule élémentaire.

Enfin, la loi statistique de Weibull est utilisée pour choisir la distribution des contraintes σ_{max} attribuées à chacun des blocs de matrice.

I.1 Schéma de résolution de la multifissuration du minicomposite

Nombre de fissures matricielles amorcées au cours du chargement en traction

Un chargement en traction est appliqué sur la cellule élémentaire avec une contrainte axiale σ croissante. Un algorithme a été développé pour déterminer le nombre de fissures créées au cours du chargement. Les fissures matricielles sont accompagnées de décohésions interfaciales. Localement, au voisinage des fissures la matrice est déchargée, et la zone de déchargement résulte en grande partie de la longueur de décohésion.

Le nombre de fissures matricielles, n_{fiss} , amorcées au cours du chargement en traction dépend alors :

- des valeurs des contraintes σ_{max} attribuées à chacun des blocs,
- ainsi que de la propagation des décohésions.

La longueur de décohésion $d(\sigma)$ a déjà été exprimée à partir de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et du coefficient de frottement μ (Équation 2.34, p. 107).

Les détails de l'algorithme sont reportés en [Annexe G](#) avec une illustration [tableau G-1](#), p. 247.

Réponse en traction à déformation imposée

Pour le calcul de la déformation axiale, on suppose **un pas de fissuration moyen**, noté L , calculé à partir du nombre de fissures créées avec

$$L = \frac{L_0}{n_{fiss} + 1} . \quad (3.1)$$

L'algorithme présenté permet de tracer la courbe contrainte/déformation (σ / ϵ). On utilise l'expression de la déformation axiale $\epsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ (Équation 2.35, p.107).

On souhaite modéliser un essai de traction à déformation imposée. L'amorçage de la fissure, à déformation imposée, provoque alors une chute de contrainte. Cela est pris en compte.

Effet d'écran, saturation de l'endommagement

L'algorithme développé permet de modéliser l'influence de la décohésion sur l'évolution de la densité de fissuration matricielle. L'effet d'écran, résultant de la propagation de la décohésion, entraîne un ralentissement de la fissuration matricielle jusqu'à la saturation de l'endommagement. Les itérations de l'algorithme sont arrêtées si au moins une des deux conditions suivante est remplie :

- dans chacun des blocs du minicomposite, soit une fissure matricielle a été créée, soit la matrice du bloc est déchargée par la présence de la fissure matricielle,
- la décohésion a atteint la longueur L_0 du minicomposite.

Cet algorithme est mis en œuvre en utilisant le code Matlab. On note que l'amorçage potentiel des fissures, pendant la phase de refroidissement après l'élaboration du minicomposite, n'est ignoré.

I.2 Comparaison avec le modèle de zones cohésives

La courbe contrainte/déformation, résultant de l'amorçage d'une unique fissure matricielle et de la propagation de la décohésion, a déjà été obtenue à l'aide du modèle semi-analytique et du modèle de zones cohésives. Une bonne corrélation a été observée.

On souhaite vérifier à présent que l'algorithme pour la multifissuration matricielle donne des résultats identiques à ceux du MZC. On s'intéresse surtout à l'évolution du nombre de fissures au cours du chargement. En effet, la décohésion interfaciale modifie l'évolution de la densité de fissuration matricielle par l'effet d'écran.

Caractéristiques de la cellule élémentaire étudiée

Les caractéristiques du microcomposite étudié ($N_f = 1$ fibre) sont présentées dans le [tableau 3.1](#). Ces caractéristiques seront utilisées dans toute la partie I, sauf mention contraire. Les coefficients de dilatation sont de valeur identique dans les directions axiale et radiale. Ils sont notés α_m et α_f pour la matrice et la fibre. Les contraintes résiduelles sont prises en compte et dépendent aussi de la variation de température ΔT après l'élaboration.

V_f	0,5	E_m	400 GPa	ν_m	0,2	α_m	$4,6.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	ΔT	- 1000 $^\circ\text{C}$
R_f	$7 \mu\text{m}$	E_f	200 GPa	ν_f	0,2	α_f	$2,9.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$		

Tableau 3.1 – Caractéristiques du microcomposite étudié (fraction volumique de fibre V_f , rayon de la fibre R_m , module élastique E_m et E_f , coefficient de Poisson ν_m et ν_f , coefficient de dilatation thermique α_m et α_f de la matrice et de la fibre). La variation de température après élaboration est notée ΔT .

Utilisation du modèle de zones cohésives (MZC)

Pour mettre en œuvre le modèle de zones cohésives, plusieurs MZC sont insérés dans le maillage EF de la cellule élémentaire de petite longueur $L_0 = 400 \mu\text{m}$. La cellule élémentaire est constituée d'une seule fibre ($N_f = 1$) entourée de sa gaine de matrice.

Huit fissures matricielles potentielles peuvent être créées. Les contraintes à rupture σ_{max} sont attribuées à chacun des huit blocs du minicomposite pour le modèle semi-analytique et à chacune des huit zones cohésives permettant de simuler la fissuration matricielle. Les valeurs des contraintes σ_{max} ont été choisies par

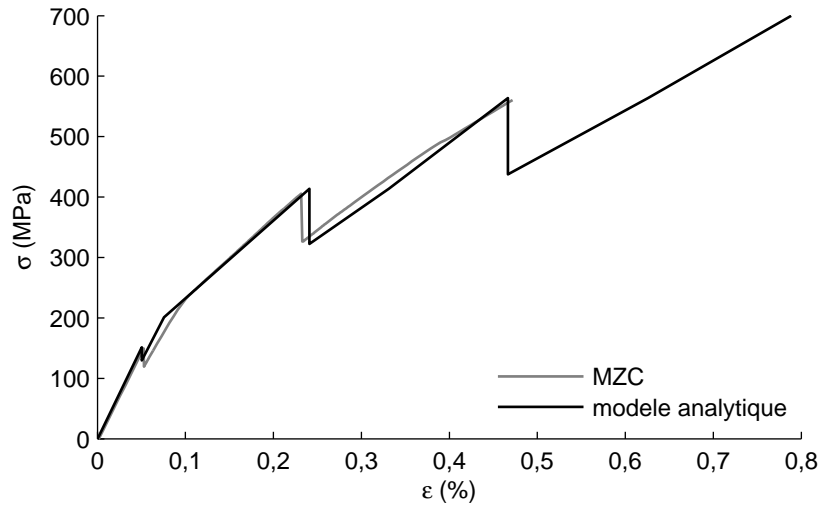
$$\sigma_{max} = \{500; 700; 850; 950; 1000; 1050; 1100; 1150\} \text{ MPa.}$$

Ces modélisations ont été obtenues avec la prise en compte des contraintes résiduelles qui permettent de maintenir le contact entre la matrice et la fibre à l'interface. Le frottement est également considéré.

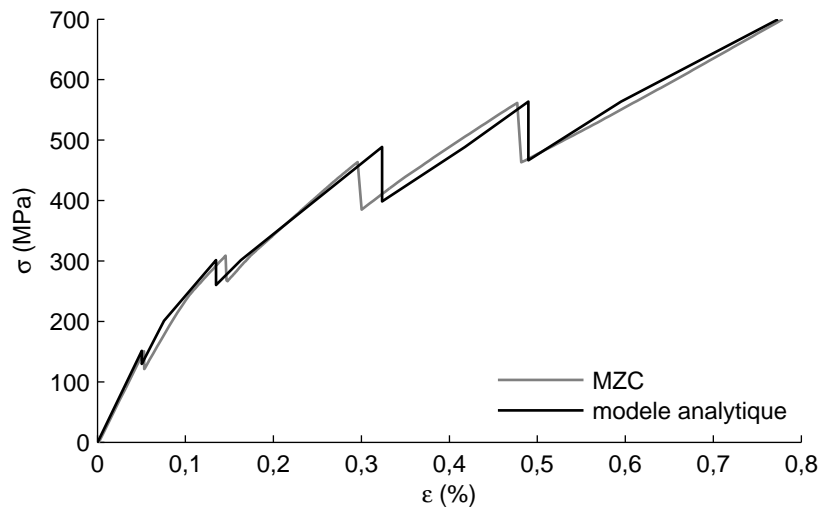
Comparaison

Le modèle du minicomposite en traction donne les mêmes résultats que le modèle de zones cohésives ([figure 3.2](#)). On peut observer le chargement à l'amorçage des fissures matricielles, puis la chute de contrainte juste après, liée à l'accroissement brutal de l'endommagement. La fissure matricielle peut s'accompagner d'une longueur de décohésion qui participe à la perte de rigidité.

Ensuite, au cours de la traction du minicomposite la décohésion se propage et la présence de cette décohésion provoque un déchargement de la contrainte axiale supportée par la matrice, sur la distance de déchargement d_r . On observe en effet qu'au maximum quatre fissures matricielles sont créées parmi les huit fissures potentielles, pour un coefficient de frottement $\mu = 0,3$. **Le MZC comme le modèle analytique donne la même évolution du nombre de fissures et de la longueur de décohésion.**



(a) $\mu = 0,2$



(b) $\mu = 0,3$

Figure 3.2 – Simulation du comportement en traction de la cellule de longueur $L_0 = 400 \mu m$ en fonction du coefficient de frottement μ . Le modèle de zones cohésives a été utilisé et comparé à l'algorithme proposé (modèle analytique). Le microcomposite a été divisé en huit blocs et huit fissures matricielles peuvent être potentiellement créées. La contrainte à rupture de la matrice $\sigma_{max} = \{500; 700; 850; 950; 1000; 1050; 1100; 1150\}$ MPa pour chacune des huit potentielles fissures dans cet ordre. L'énergie de rupture de l'interface $G_i^c = 4 J.m^{-2}$.

I.3 Influence de la longueur du minicomposite

Jusqu'à présent une cellule élémentaire de petite taille $L_0 = 400 \mu m$ a été considérée. Les chutes de contraintes, lors de l'amorçage des fissures matricielles, sont bien visibles sur la réponse en traction.

On considère maintenant une cellule élémentaire du minicomposite de plus grande dimension. Les chutes de contrainte liées à l'amorçage de la fissure matricielle sont de plus faible amplitude (figure 3.3).

La longueur du minicomposite L_0 varie mais la taille des blocs L_{bloc} reste identique pour les trois simulations présentées. Le nombre final de fissures dans le minicomposite augmente alors avec la longueur L_0 .

Les contraintes à rupture de la matrice σ_{max} sont choisies aléatoirement avec

$$\sigma_{max} \in [500; 1150] \text{ MPa.}$$

Pour toute cette partie, l'énergie de rupture $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et le coefficient de frottement est $\mu = 0,4$.

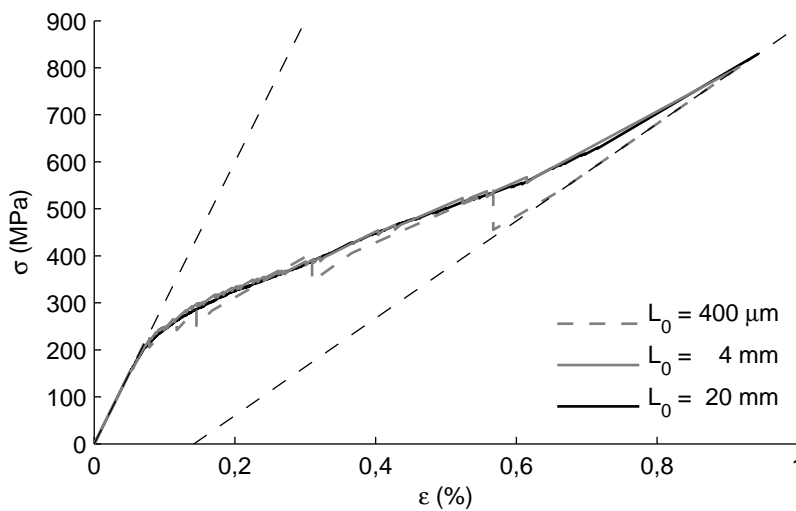


Figure 3.3 – Simulation du comportement en traction du microcomposite en fonction de sa longueur L_0 . Le microcomposite a été divisé en blocs de taille $L_{bloc} = 44,4 \text{ } \mu\text{m}$ dans lesquels les fissures potentielles peuvent être créées. La contrainte à rupture de la matrice σ_{max} est choisie aléatoirement entre 500 et 1500 MPa pour chacun des blocs. L'énergie de rupture de l'interface $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$.

On observe que les courbes contrainte/déformation convergent lorsque la taille du minicomposite augmente (figure 3.3). Cette convergence souligne le comportement déterministe du minicomposite de longueur infinie [Castelier et al., 2010]. Le comportement du minicomposite perd graduellement son caractère aléatoire lorsque sa taille augmente.

I.4 Probabilité de rupture d'un volume de matrice

On propose de prendre en compte la multifissuration de la matrice par le biais de considérations statistiques fondées sur la **probabilité de rupture** d'un volume de matrice. La loi de Weibull est adaptée aux mécanismes de rupture fragile des composites à matrice céramique.

Approche par volumes élémentaires indépendants

Le modèle de volumes élémentaires indépendants est considéré. Pour cela, le minicomposite est divisé sur sa longueur en n_{bloc} blocs dans lesquels une fissure matricielle peut

être créée. Les blocs isolés sont de taille identique $L_{bloc} = \frac{L_0}{n_{bloc} + 1}$. L'amorçage de la potentielle fissure matricielle est gouvernée par la contrainte maximale de la matrice σ_{max} qui est attribuée aléatoirement à chacun des blocs.

Les paramètres de Weibull (la contrainte seuil $\sigma_{max,0}$ et le module m) décrivent la probabilité d'amorçage d'une fissure au sein d'un bloc de volume V_{bloc} . Ce volume peut être déterminé à partir de la taille L_{bloc} des blocs et du nombre N_f de fibres par

$$V_{bloc} = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2) L_{bloc} . \quad (3.2)$$

La probabilité P d'amorçage d'une fissure est reliée à σ_{max} par

$$P = 1 - \exp \left(- \frac{V_{bloc}}{V_{ref}} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max,0}} \right)^m \right) , \quad (3.3)$$

où le volume de référence $V_{ref} = 1 \text{ m}^3$. Dans chacun des blocs, la contrainte maximale σ_{max} peut être attribuée aléatoirement en utilisant la relation 3.3 et la probabilité de rupture P considérée comme une variable aléatoire uniforme comprise entre 0 et 1. La contrainte σ_{max} dans chaque bloc se calcule alors par

$$\sigma_{max} = \sigma_{max,0} \left(-\log(1 - P) \frac{V_{ref}}{V_{bloc}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{avec } P \in [0; 1] . \quad (3.4)$$

La fissure est amorcée dans le bloc concerné dès que la contrainte supportée par la matrice atteint σ_{max} .

Approche itérative

On note qu'une seconde approche appelée approche itérative permet également de modéliser la multifissuration de la matrice par tirage aléatoire de la contrainte à rupture. Cette fois ci les contraintes à rupture ne sont pas attribuées préalablement au sein du minicomposite divisé en blocs. Les fissures matricielles divisent le minicomposite en plusieurs fragments dont la taille L_{frag} dépend de l'emplacement des fissures. En notant $\sigma_{max,p}$ correspondant à la précédente fissure matricielle, la contrainte à rupture pour la nouvelle fissure potentielle se détermine par la méthode itérative par

$$\sigma_{max} = \left(\sigma_{max,p}^m - \sigma_{max,0}^m \log(1 - P) \frac{V_{ref}}{V_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{avec } P \in [0; 1] , \quad (3.5)$$

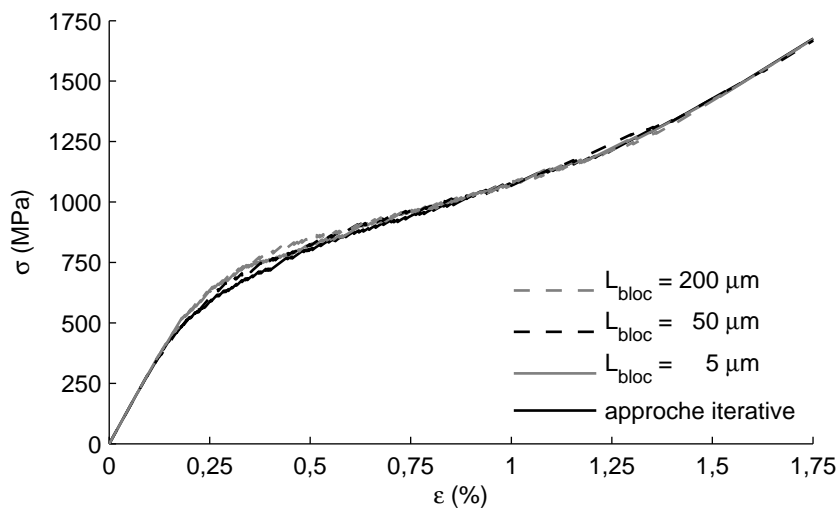
où $V_0 = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2) L_0$ est le volume de matrice du minicomposite entier et P est la probabilité de rupture donnée aléatoirement [Castelier et al., 2010]. La nouvelle fissure matricielle est ensuite placée aléatoirement dans le minicomposite à condition qu'elle ne soit pas localisée dans une zone où la matrice est déchargée.

Cette approche itérative est également programmée pour vérifier que l'écriture du code de ces deux modèles donne bien le même résultat. On pourra aussi vérifier que le modèle en volume élémentaires indépendants donne des résultats équivalents si les blocs sont de taille suffisamment faible.

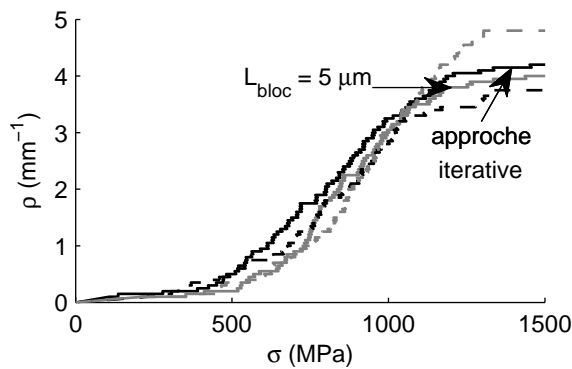
I.5 Comportement en traction avec la loi statistique pour la multifissuration de la matrice

Les simulations présentées sont réalisées pour un microcomposite de taille $L_0 = 20$ mm en utilisant la loi de Weibull (équation 3.4) avec la contrainte seuil $\sigma_{max,0} = 11$ MPa et le module $m = 6$ [Lissart et Lamon]. Les valeurs de la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} sont attribuées aléatoirement à partir de cette loi (figure 3.4).

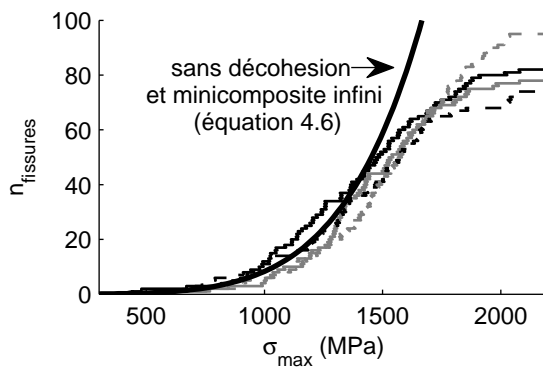
Une distribution différente des contraintes σ_{max} est utilisée pour chacune des quatre simulations présentées figure 3.4a. On retrouve malgré tout le **comportement moyen** du microcomposite. On montre ainsi que la taille des blocs $L_{bloc} < 200$ μm ne modifie pas la courbe contrainte/déformation.



(a) Réponse en traction



(b) densité de fissuration matricielle



(c) nombre de fissures

Figure 3.4 – (a) Simulation du comportement en traction du microcomposite de longueur $L_0 = 20$ mm en fonction de la taille des blocs L_{bloc} qui divisent le microcomposite. (b) Densité de fissuration matricielle à partir de la contrainte appliquée σ . (c) Evolution du nombre de fissures créées en fonction des contraintes à rupture σ_{max} . La contrainte à rupture de la matrice σ_{max} dépend de la probabilité de Weibull (équation 3.4) et des paramètres $\sigma_{max,0} = 11$ MPa et $m = 6$ [Lissart et Lamon]. Ces simulations sont obtenues pour un nombre de fibres $N_f = 1$. L'énergie de rupture de l'interface $G_i^c = 4$ J.m⁻² et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$.

Taille des blocs de matrice

La densité de fissuration matricielle $\rho = 1/L$ s'accroît tout au long du chargement en traction puis ralentit jusqu'à ce que le réseau de fissures soit entièrement saturé (figure 3.4b). On observe que la valeur moyenne de la densité de fissures matricielles, à saturation, est d'environ 4 mm^{-1} (soit un pas de fissuration $L \approx 250 \text{ } \mu\text{m}$) lorsque la taille L_{bloc} des blocs diminue. Cette valeur dépend à la fois des paramètres de Weibull qui fournissent les contraintes à rupture σ_{max} et des propriétés de l'interface (énergie de rupture G_i^c et coefficient de frottement μ). Avec les propriétés choisies, **une taille des blocs $L_{bloc} = 5 \text{ } \mu\text{m}$ est suffisante** pour que le comportement en traction (a) et la densité de fissuration (b) permettent d'obtenir un comportement moyen et une densité de fissuration moyenne.

Approche itérative

Un deuxième algorithme du minicomposite ou du microcomposite en traction a été développé sur la base de l'approche itérative déjà présentée précédemment (section I.4). Cette fois ci, le microcomposite n'est pas divisé en blocs indépendants dans lesquels les contraintes à rupture σ_{max} sont attribuées par la statistique de Weibull. Les tirages aléatoires de σ_{max} sont réalisés au cours de la modélisation de l'endommagement à l'aide de la relation 3.5. Les deux approches doivent fournir des simulations identiques, pourvu que la taille des blocs soit suffisamment faible pour l'approche en volumes élémentaires indépendants. L'intérêt de comparer ces deux algorithmes est alors de vérifier que leur programmation est cohérente.

On observe en effet que **les courbes simulées à l'aide des deux algorithmes** donnent la même réponse en traction, la même évolution du nombre de fissures et **le même pas de fissuration matricielle à saturation** de l'endommagement.

Minicomposite infini et sans décohésion

La figure 3.4c représente le nombre de fissures matricielles n_{fiss} obtenu en fonction de la contrainte σ_{max} . La décohésion interfaciale freine l'évolution du nombre de fissures matricielles jusqu'à la saturation du réseau de fissures. Dans certains blocs en présence de décohésion, la fissuration matricielle ne peut se former. Si la décohésion n'est pas prise en compte, la contrainte dans la matrice n'est jamais nulle dans les blocs non fissurés et chacune des fissures potentielles est amorcée dès que la contrainte supportée par la matrice atteint la valeur σ_{max} . Dans ce cas et en faisant l'hypothèse d'un minicomposite infini, l'évolution du nombre de fissures matricielles est donnée en fonction des propriétés de Weibull par

$$n_{fiss} = \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max,0}} \right)^m \frac{V_0}{V_{ref}} \quad \text{avec} \quad V_0 = N_f \pi \left(R_m^2 - R_f^2 \right) L_0, \quad (3.6)$$

où N_f est le nombre de fibres dans le minicomposite. En présence de décohésion interfaciale, dès que la longueur de décohésion est suffisamment grande, l'effet d'écran entraîne un ralentissement du nombre de fissures matricielles.

Cette expression du nombre moyen de fissure peut être envisagée pour pouvoir identifier les paramètres de Weibull $\sigma_{max,0}$ et m à partir des résultats expérimentaux.

II Comportement moyen et expression de la densité de fissuration matricielle

II.1 Expression de la densité de fissures matricielles

L'hypothèse du minicomposite de taille infinie permet d'estimer la réponse en traction moyenne et l'évolution moyenne de la densité de fissuration (figure 3.3). On considère une distribution des contraintes à rupture σ_{max} dans la matrice résultant de la statistique de Weibull, paramétrée par la norme $\sigma_{max,0}$ et le module m . Si on rajoute l'hypothèse supplémentaire d'une distance de déchargement nulle autour des fissures matricielles ($d_r = 0$), la contrainte axiale supportée par la matrice est homogène dans tout le minicomposite. Sous ces deux hypothèses, nous avons vu que le nombre de fissures $n_{fiss} = n_{fiss}^p$ créées dans la matrice en fonction de la contrainte appliquée est donné par (équation 3.6)

$$n_{fiss}^p = \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max,0}} \right)^m \frac{V_0}{V_{ref}} \quad \text{avec} \quad V_0 = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2) L_0. \quad (3.7)$$

Cette densité de fissuration fournit donc l'**évolution des fissures matricielles potentielles** dans le minicomposite de taille infinie. Cette loi permet alors d'estimer le nombre de fissures moyen pour de faibles valeurs de la contrainte appliquée. Pour un chargement plus élevé, la longueur de décohesion est suffisamment élevée pour que les zones de déchargement de la matrice ne soient plus négligeables. Cet effet d'écran entraîne le ralentissement de la fissuration matricielle jusqu'à saturation de l'endommagement.

On souhaite développer une **expression approchée de l'évolution du nombre de fissures** n_{fiss} en fonction de la contrainte appliquée σ , en prenant en compte le ralentissement de l'amorçage des fissures lié à l'accroissement des longueurs de décohesion. On note $\sigma_{max}(i)$ la contrainte à rupture de la $i^{ième}$ potentielle fissure matricielle donnée à partir de la relation 3.7. On propose d'exprimer le nombre de fissures matricielles n_{fiss} de manière récursive en considérant successivement chacune des fissures potentielles. A chaque incrément, le raisonnement consiste à calculer le nombre de fissures $n_{fiss}(i)$ par la somme des nouvelles fissures créées et du nombre de fissures précédentes $n_{fiss}(i-1)$. Le nombre de fissures potentielles supplémentaires est exprimé ainsi que la probabilité qu'elles soient localisées dans une zone où la matrice est déchargée.

Initialement, le minicomposite est sain et la première fissure potentielle est amorcée. Elle est disposée aléatoirement. La relation 3.7 permet d'écrire simplement

$$n_{fiss}(1) = \left(\frac{\sigma_{max}(1)}{\sigma_{max,0}} \right)^m \frac{V_0}{V_{ref}}. \quad (3.8)$$

Cette fissure peut s'accompagner de décohesion interfaciale. L'endommagement entraîne un déchargement de la matrice sur une distance $d_r(\sigma)$ autour de la fissure matricielle. Cette distance dépend de la contrainte axiale appliquée σ .

On analyse à présent l'amorçage possible de la deuxième fissure. Cette deuxième fissure potentielle peut être créée si la contrainte axiale dans la matrice atteint la valeur $\sigma_{max}(2)$. En notant $\sigma(2)$ la contrainte appliquée sur le minicomposite, la distance de déchargement autour de la précédente fissure matricielle est donnée par $d_r(\sigma(2))$. La nouvelle fissure potentielle est disposée aléatoirement le long du minicomposite. La probabilité P_2 pour que cette fissure

soit localisée dans une zone où la matrice n'est pas déchargée est donnée par

$$P_2 = 1 - \frac{d_r(\sigma(2))n_{fiss}(1)}{L_0}, \quad (3.9)$$

où $d_r(\sigma(2))n_{fiss}(1)$ représente la longueur de décohésion totale sur l'ensemble du minicomposite.

Le nombre de nouvelles fissures matricielles potentielles $\delta n_{fiss,1 \rightarrow 2}^p$ peut être calculé en utilisant la relation 3.7 par

$$\delta n_{fiss,1 \rightarrow 2}^p = \frac{V_0}{V_{ref}} \frac{(\sigma_{max}(2))^m - (\sigma_{max}(1))^m}{\sigma_{max,0}^m}. \quad (3.10)$$

On peut alors évaluer le nombre effectif de fissures supplémentaires $\delta n_{fiss,1 \rightarrow 2}$ par l'expression

$$\delta n_{fiss,1 \rightarrow 2} = \delta n_{fiss,1 \rightarrow 2}^p P_2. \quad (3.11)$$

Enfin, le nombre de fissures $n_{fiss}(2)$ peut s'exprimer par $n_{fiss}(2) = \delta n_{fiss,1 \rightarrow 2} + n_{fiss}(1)$, soit

$$n_{fiss}(2) = \frac{V_0}{V_{ref}} \frac{(\sigma_{max}(2))^m - (\sigma_{max}(1))^m}{\sigma_{max,0}^m} \left(1 - \frac{d_r(\sigma(2))n_{fiss}(1)}{L_0} \right) + n_{fiss}(1). \quad (3.12)$$

De façon générale, on obtient une approximation du nombre de fissures $n_{fiss}(i)$ à l'incrément i par un raisonnement analogue. La probabilité P_i que la nouvelle fissure matricielle soit située dans une zone où la contrainte axiale n'est pas déchargée dépend de la distance de déchargement $d_r(\sigma(i))$ et du nombre de fissures $n_{fiss}(i-1)$ à l'incrément précédent. Le nombre de fissure $n_{fiss}(i)$ s'exprime alors par

$$n_{fiss}(i) = \frac{V_0}{V_{ref}} \frac{(\sigma_{max}(i))^m - (\sigma_{max}(i-1))^m}{\sigma_{max,0}^m} \left(1 - \frac{d_r(\sigma(i))n_{fiss}(i-1)}{L_0} \right) + n_{fiss}(i-1). \quad (3.13)$$

L'évolution évaluée du nombre de fissures n_{fiss} est alors déterminée récursivement à l'aide de l'équation 3.13 en fonction de la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} . Ce modèle approché fait intervenir uniquement les caractéristiques du minicomposite ainsi que les propriétés à rupture de la matrice (paramètres de Weibull $\sigma_{max,0}$ et m) et les propriétés de l'interface (énergie de rupture G_i^c et coefficient de frottement μ).

Il a été supposé que la distance de rechargement $d_r(\sigma)$ se calcule directement à partir de l'évolution de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ (Équation 2.34) par

$$d_r(\sigma) = d(\sigma) + 3R_f, \quad (3.14)$$

où σ^{ci} est la contrainte qui permet de propager la décohésion et la contrainte σ_μ est identifiée à l'aide du modèle de zones cohésives en fonction de G_i^c et de μ . La contrainte appliquée σ peut être déterminée à partir de la contrainte dans la matrice σ_{max} , toujours en utilisant la relation

$$\sigma = \sigma_{max} \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} - \sigma^T, \quad (3.15)$$

où σ^T est la contrainte résiduelle dans la matrice (Équation 1.78, p.68).

Au final, l'équation 3.13 est utilisée pour déterminer l'évolution du nombre de fissures $n_{fiss}(\sigma)$ en fonction de la contrainte appliquée σ calculée à partir de σ_{max} (équation 3.15). $n_{fiss}(\sigma)$ est estimé récursivement en discrétisant la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} .

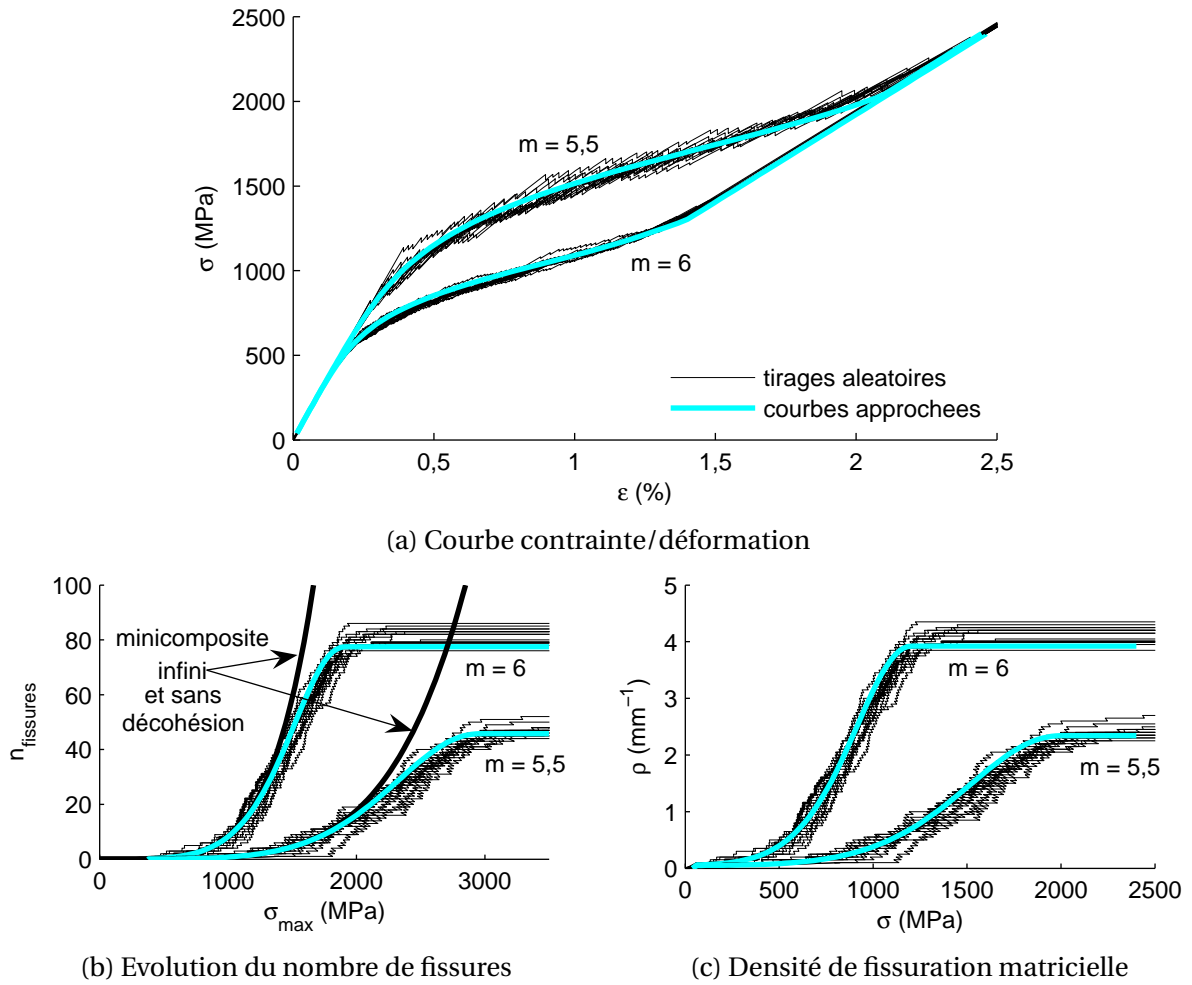


Figure 3.5 – (a) Réponse en traction du microcomposite $L_0 = 20$ mm simulé à partir du modèle de multifissuration aléatoire (15 tirages réalisés pour les deux séries de courbes) et à partir du modèle approché. L'influence du module de Weibull est étudié avec $\sigma_{max,0} = 11$ MPa et $m = 6$ ou $m = 5,5$. (b) L'évolution du nombre de fissures matricielles n_{fiss} est donné en fonction de la contrainte à rupture dans la matrice σ_{max} qui entraîne l'amorçage de la $n^{ième}$ fissure. (c) La densité de fissures matricielle ρ est représentée en fonction de la contrainte appliquée σ . L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$.

L'évolution du nombre de fissures n_{fiss} a été déterminée en utilisant l'équation réursive 3.13 à partir des propriétés à rupture de la matrice et de l'interface (figure 3.5b). n_{fiss} est donnée en fonction des contraintes à rupture dans la matrice σ_{max} et ces valeurs sont comparées au nombre de fissures évaluées à l'aide de l'algorithme par tirages aléatoires. Tant que la longueur de décohesion est suffisamment faible, n_{fiss} suit l'évolution donnée par l'équation 3.7 correspondant au minicomposite de taille infinie et sans décohesion. Puis l'accroissement du nombre de fissures ralentit jusqu'au palier de saturation. Cette expression approchée permet une bonne estimation du nombre de fissures du minicomposite en traction obtenue avec les 15 tirages aléatoires et fournit même une bonne valeur du nombre de fissures atteint à la saturation de l'endommagement.

La **densité de fissuration matricielle** ρ peut être déduite du nombre de fissures par

$$\rho(\sigma) = \frac{n_{fiss}(\sigma) + 1}{L_0}. \quad (3.16)$$

Bilan

L'évolution des deux mécanismes d'endommagement au sein du minicomposite en traction est exprimé directement à partir de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c , du coefficient de frottement μ et des paramètres de la loi de Weibull pour la fissuration de la matrice :

- la densité de fissures matricielles $\rho(\sigma)$ est exprimée par le relation itérative du nombre de fissures (Équation 3.13),
- et la longueur de décohésion $d(\sigma)$ est exprimée par l'Équation 2.34.

Enfin, la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L = 1/\rho(\sigma), d(\sigma))$ du minicomposite est exprimée Équation 2.35, p. 107.

Les simulations ainsi obtenues à partir de ces trois relations semi-analytiques permettent de **bien approximer les réponses en traction modélisées avec les tirages aléatoires** des contraintes à rupture de la matrice (figure 3.5).

On souhaite maintenant montrer les différences entre les équations du modèle proposé et celles des modèles micromécaniques déjà existants.

II.2 Comparaison avec des précédents modèles statistiques

Deux modèles statistiques de la multifissuration de la matrice

Les modèles de minicomposite en traction proposés par [Lissart et Lamon] et [Castelier et al., 2010] considèrent la loi statistique de Weibull pour l'attribution aléatoire des contraintes à rupture de la matrice :

1. Pour le modèle de [Lissart et Lamon], les fissures sont tirées aléatoirement au cours du chargement mécanique conduisant à un comportement aléatoire du minicomposite. Les fissures matricielles divisent le minicomposite en fragments et la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} est déterminée non pas initialement mais au cours du chargement. Un algorithme différent de celui qui a été proposé au cours de cette thèse est utilisé.

L'algorithme est programmé en imposant la contrainte appliquée σ . A chaque incrément de contrainte, la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} est calculée pour chaque fragment de matrice en reprenant l'équation 3.3. Cette contrainte est déterminée à partir de la probabilité P d'amorcer une fissure dans un volume de matrice V_{frag} de la zone saine du fragment considéré. Le volume V_{frag} est estimé en fonction de la longueur du fragment L_{frag} sans prendre en compte la longueur de décohésion d , ce qui donne

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{V_{frag}}{V_{ref}} \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max,0}}\right)^m \quad \text{avec} \quad V_{frag} = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2) (L_{frag} - d), \quad (3.17)$$

où les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte. Ensuite la probabilité de rupture est fixée à $P = 0,5$ et la contrainte σ_{max} peut alors être déterminée par

$$\sigma_{max} = \sigma_{max,0} \left(-\log(1 - P) \frac{V_{ref}}{V_{frag}} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = 0,5 \\ V_{frag} = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2) (L_{frag} - d) \end{cases} \quad (3.18)$$

La fissure matricielle est créée dans le fragment considéré à condition que la contrainte supportée par la matrice soit au moins supérieure à σ_{max} . Dans ce cas la nouvelle fissure est placée aléatoirement dans la zone saine du fragment pour créer deux fragments de plus petite taille.

On observe alors que le ralentissement de la fissuration matricielle résulte du calcul de la contrainte σ_{max} en fonction de $L_{frag} - d$ qui tend vers 0, au lieu d'être lié à la localisation de la fissure potentielle dans une zone où la matrice est déchargée.

2. [Castelier et al., 2010] ont repris le modèle de [Hui et al., 1997] où le minicomposite est de taille infinie. Nous avons précédemment montré que sous cette hypothèse on obtient le comportement moyen du minicomposite en traction et l'évolution moyenne du nombre de fissures (figure 3.3). La résolution de ce modèle est plus complexe et passe par le calcul de la distribution statistique des fragments de matrice. Les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte.

En parallèle, la décohésion interfaciale est évaluée par le **modèle du transfert de charge linéaire** entre la fibre et la matrice à partir de la contrainte de **cisaillement interfaciale** τ . Ce modèle de transfert de charge a déjà été présenté (chapitre 2, p. 76). L'énergie de rupture de l'interface G_i^c est supposée nulle ou négligeable. L'évolution de la décohésion interfaciale $d(\sigma)$ est calculée linéairement en fonction de la contrainte appliquée σ .

Comparaison de la réponse en traction

Il est possible de comparer ces deux modèles avec le modèle semi-analytique proposé. On souhaite ainsi valider la multifissuration matricielle évaluée par l'algorithme du modèle semi-analytique. L'expression du nombre de fissures au cours de la traction a donné la même évolution de la densité de fissures matricielles que le modèle par tirages aléatoires (figure 3.5).

Le modèle de [Lissart et Lamon] ainsi que de [Castelier et al., 2010] considèrent que :

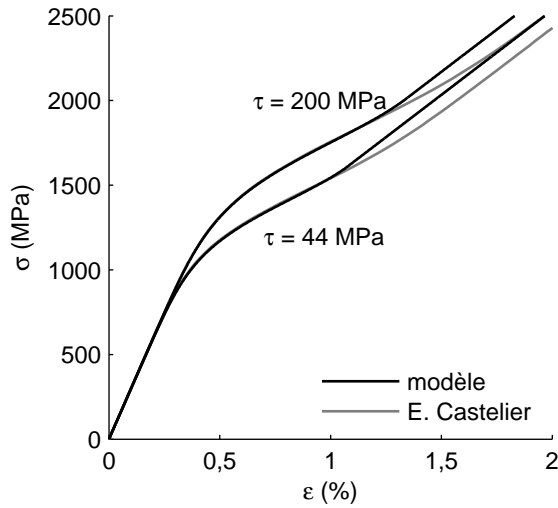
- l'énergie de rupture de l'interface doit être nulle ($G_i^c = 0$),
- les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte,
- le transfert de charge est décrit par le cisaillement interfacial caractéristique τ .

Au cours du chapitre 2, p. 92-93, on a aussi exprimé l'évolution de la décohésion $d(\sigma)$ (2.18) et la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$ (2.20) sous les hypothèses du transfert de charge linéaire. Ces expressions sont alors utilisées pour pouvoir réaliser les comparaisons.

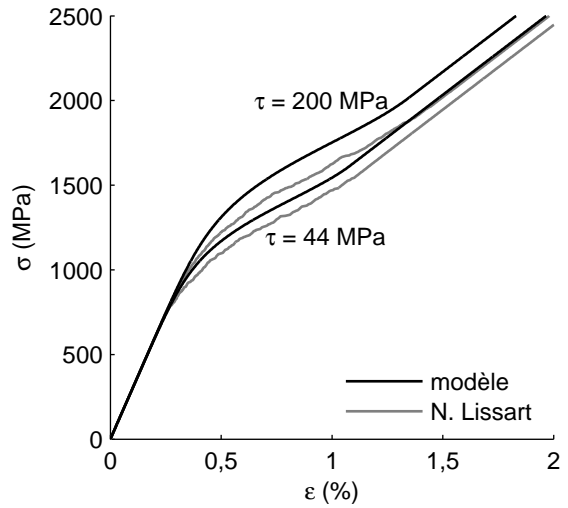
L'énergie de rupture de l'interface n'est pas prise en compte ($G_i^c = 0$) et les contraintes résiduelles non plus.

La réponse en traction et l'évolution de la fissuration matricielle, obtenues à partir des trois modèles, sont tracées pour deux valeurs du cisaillement interfacial caractéristique τ (figure 3.6).

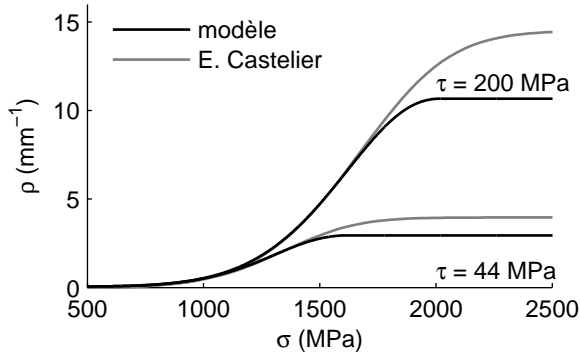
On observe que l'évolution de la densité de fissuration matricielle, pour les faibles valeurs de la contrainte appliquée, qui est déterminée d'après le modèle semi-analytique et le modèle de [Castelier et al., 2010], est identique (figure 3.6a-2). Cependant, la densité de



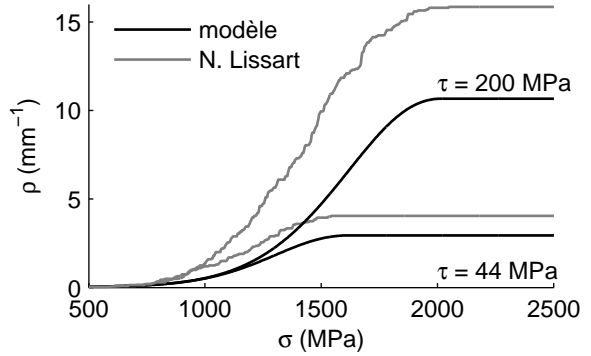
(a-1) Courbe contrainte/déformation



(b-1) Courbe contrainte/déformation



(a-2) Densité de fissuration matricielle



(b-2) Densité de fissuration matricielle

Figure 3.6 – Simulation de la réponse en traction à l’aide du modèle semi-analytique, du modèle de [Castelier et al., 2010] (a) et du modèle de [Lissart et Lamon] (b). Les contraintes à rupture σ_{max} dans la matrice sont distribuées en fonction de la statistique de Weibull et des paramètres $\sigma_{max,0} = 11 \text{ MPa}$ et $m = 6$. Ces simulations sont obtenues pour un nombre de fibres $N_f = 1$. Les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte et $G_i^c = 0$.

fissuration matricielle calculée par l’Équation 3.13, est plus faible lors de la saturation de l’endommagement.

Le modèle de [Castelier et al., 2010] fournit également le comportement moyen du mini-composite en traction (figure 3.6a-1). On observe que la réponse en traction est identique au comportement déterminé à l’aide de l’expression $\varepsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ (Équation 2.20), développée dans le cas du transfert de charge linéaire. Ceci reste vrai tant qu’il n’y a pas d’écart entre la densité de fissuration calculée par les deux modèles.

L’évolution de la densité de fissuration matricielle $\rho(\sigma)$, pour le modèle semi-analytique présenté, est déterminée d’après la relation (Équation 3.13). On a montré que cette relation permet bien de retrouver la densité de fissuration matricielle obtenue avec l’approche par tirages aléatoires (figure 3.5).

Une comparaison entre les équations développées au cours de ces travaux et le modèle de [Vagaggini et al., 1995] est présentée en Annexe H.

II.3 Influence des propriétés sur le comportement en traction

Microcomposite ou minicomposite

Jusqu'à présent les simulations présentées sont obtenues pour un microcomposite. Nous considérons maintenant un minicomposite composé de $N_f = 500$ fibres. La valeur des contraintes à rupture calculées aléatoirement à partir de la statistique de Weibull dépendent du volume de matrice à fissurer (équation 3.4). Le volume de matrice à fissurer, noté V_{bloc} , s'exprime à partir du nombre de fibres. Un volume de matrice plus grand implique des contraintes à rupture plus faibles.

La figure 3.7 montre en effet que la limite élastique du minicomposite est plus faible et que le pas de fissuration à rupture est plus large. Ceci est cohérent avec les observations expérimentales sur des microcomposites SiC/SiC en traction, où des pas de fissuration plus larges sont estimés. A rupture, 60 fissures matricielles peuvent être évaluées au sein d'un microcomposite de longueur 20 mm [Rapaud, 2002], ce qui donne une densité de fissuration à rupture de 3 mm^{-1} . Les deux simulations sont obtenues à partir des mêmes paramètres de Weibull $\sigma_{max,0}$ et m et les mêmes propriétés de l'interface G_i^c et μ .

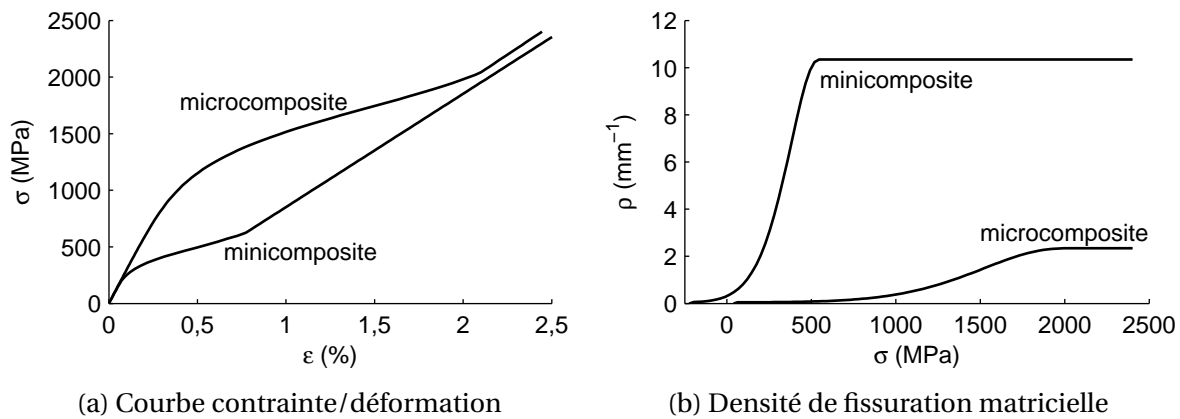


Figure 3.7 – Réponse en traction du microcomposite et du minicomposite de longueur $L_0 = 20$ mm possédant les mêmes caractéristiques (tableau 3.1). Les paramètres de Weibull sont $\sigma_{max,0} = 11$ MPa et $m = 5,5$. L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$.

Limite élastique

Compte tenu du comportement du minicomposite ou microcomposite simulé (figure 3.7), on peut se demander si il est possible d'identifier certaines propriétés à partir de la limite élastique du minicomposite en traction.

La perte de rigidité au début de l'endommagement est très progressive et liée à l'amorçage des premières fissures. On observe d'abord qu'il est difficile d'estimer précisément cette limite élastique à l'aide des courbes de réponse en traction. L'amorçage des toutes premières fissures matricielles au sein du minicomposite de taille suffisamment grande n'entraîne pas de perte de rigidité significative. Dans le cadre de ces travaux, on considère que la limite élastique correspond à une perte de rigidité d'au moins 5 % par rapport au module initial.

On note σ_0 la limite élastique ainsi définie et obtenue à partir du comportement en traction. Il serait utile de savoir s'il est possible d'identifier l'énergie de rupture de l'interface G_i^c à partir de la limite élastique. En effet la perte de rigidité est liée à la fois aux fissures matricielles et à la propagation de la décohésion. L'évolution du module élastique avec l'endommagement a déjà été étudié (chapitre 2) en fonction du pas de fissuration et de la longueur de décohésion.

La contrainte appliquée σ^{ci} qui permet de propager la décohésion dépend de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et des contraintes résiduelles. A partir des caractéristiques du minicomposite ou du microcomposite, on note que la valeur de la contrainte appliquée σ^{ci} est voisine de 200 MPa. Une analyse de l'évolution du module élastique du minicomposite et du microcomposite simulé permet d'évaluer la limite élastique σ_0 (figure 3.7).

Pour la simulation du minicomposite, les premières fissures matricielles sont créées pour de faibles valeurs de la contrainte appliquée $\sigma < 200$ MPa, donc avant la propagation de la décohésion interfaciale. L'évolution du module élastique a montré une très faible diminution de la rigidité pour $\sigma < 200$ MPa. Au delà, la rigidité du minicomposite se dégrade beaucoup plus rapidement avec la propagation de la décohésion et la limite élastique peut être estimée à $\sigma_0 \approx 200 \pm 25$ MPa. Dans le cas de cette simulation, on montre que la limite élastique σ_0 peut fournir une estimation de la contrainte σ^{ci} qui déclenche la propagation de la décohésion.

Au contraire la simulation du microcomposite donne une limite élastique beaucoup plus élevée (figure 3.7). Cette fois, les premières fissures matricielles sont créées progressivement pour une contrainte appliquée $\sigma > \sigma^{ci}$. La contrainte σ_0 est estimée à $\sigma_0 \approx 900 \pm 25$ MPa et ne permet aucune déduction de σ^{ci} .

Pour résumer, on peut envisager une estimation de la contrainte σ^{ci} à partir de la limite élastique du comportement en traction si deux conditions sont réunies :

- l'amorçage des premières fissures matricielles est réalisée pour une contrainte appliquée au plus égale à la contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion,
- la limite élastique, soit la perte de rigidité d'au moins 5 % du module initial, fournit une bonne approximation du début de la propagation de la décohésion.

A partir de la connaissance de σ^{ci} et des contraintes résiduelles, il est possible de déduire la valeur de l'énergie de rupture G_i^c .

Dans toute la suite, les simulations présentées sont réalisées pour un **minicomposite constitué de $N_f = 500$ fibres**. Les caractéristiques de ce minicomposite et les coefficients utilisés sont toujours ceux donnés par le [tableau 3.1](#).

On réalise une étude de sensibilité des paramètres de la loi statistique de Weibull, de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et du coefficient de frottement μ , ainsi que de la fraction volumique de fibres V_f .

Distribution des contraintes à rupture

L'effet des paramètres statistiques de Weibull sur la réponse en traction du minicomposite est à présent analysé. On étudie l'influence du module m (figure 3.8a) et de la norme $\sigma_{max,0}$ (b) sur la réponse en traction et la densité moyenne de fissures matricielles.

Le module m favorise la dispersion des contraintes à rupture de la matrice σ_{max} . On observe d'abord que la réponse en traction est sensible à la variation du module m . Une variation de 5 % de m peut entraîner une variation de la contrainte moyenne de 30 % et doubler la densité de fissuration à saturation. De plus, plusieurs couples $(\sigma_{max,0}, m)$ permettent d'obtenir la même cinétique de fissuration matricielle ce qui va à l'encontre d'une identification directe de ces paramètres.

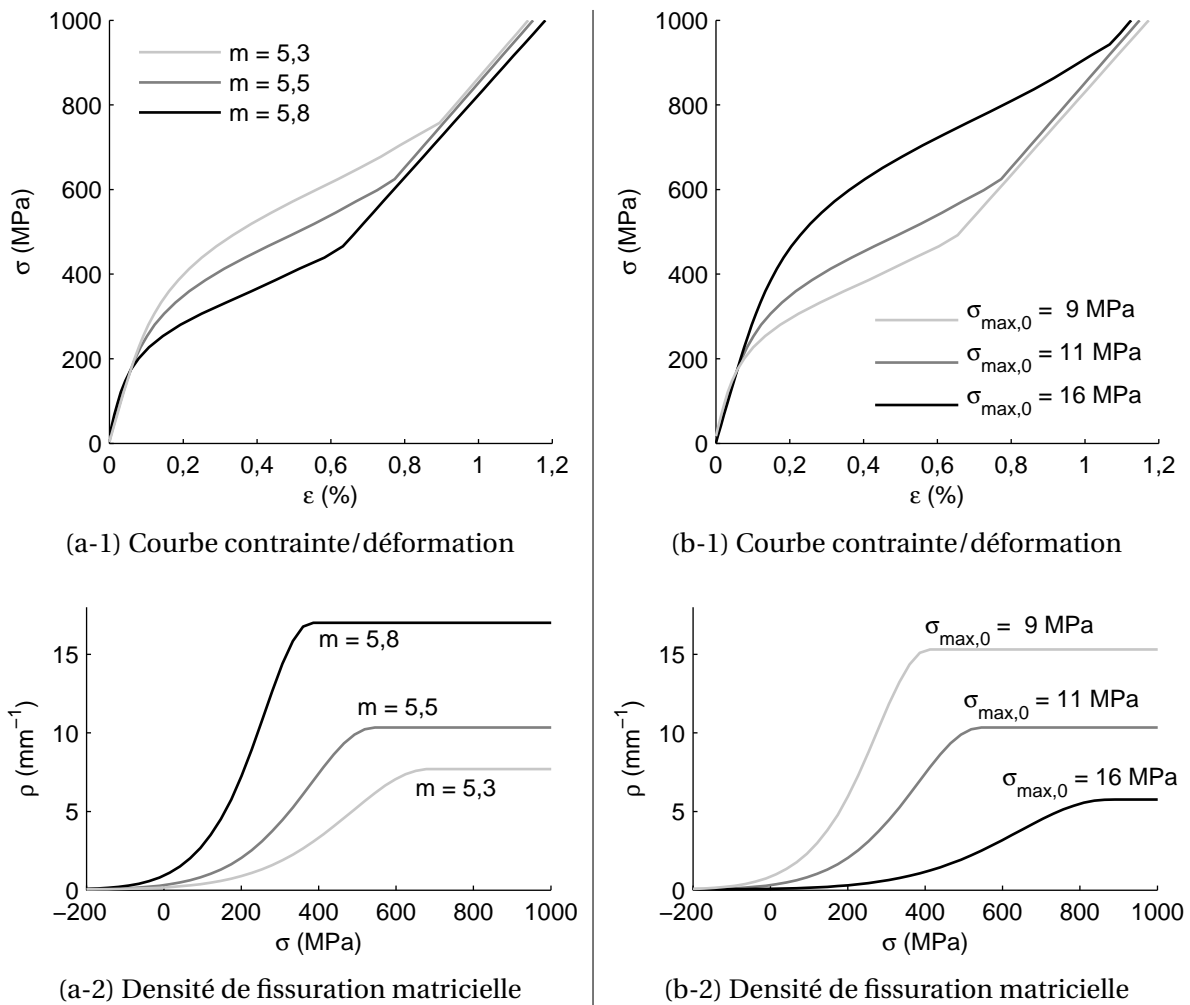


Figure 3.8 – Réponse en traction du minicomposite de longueur $L_0 = 20$ mm avec $N_f = 500$ fibres. Les paramètres de Weibull sont $\sigma_{max,0} = 11$ MPa (b) et $m = 5,5$ (a). L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$. Les contraintes à rupture de la matrice sont distribuées aléatoirement en fonction de la statistique de Weibull. L'influence de la norme $\sigma_{max,0}$ et du module m est étudiée.

La limite élastique est identique pour les six courbes de traction indépendamment des paramètres m et $\sigma_{max,0}$ qui régissent les valeurs des contraintes à rupture de la matrice σ_{max} . La contrainte σ_0 à la limite élastique est estimée à $\sigma_0 = 200$ MPa. Cette limite élastique permet d'identifier la contrainte σ^{ci} qui déclenche la propagation de la décohésion. σ^{ci} dépend de G_i^c et des caractéristiques du minicomposite et vaut $\sigma^{ci} \approx 200$ MPa.

Propriétés de l'interface

L'énergie de rupture de l'interface G_i^c et le coefficient de frottement μ gouvernent la propagation de la longueur de décohesion. Leur conséquence sur le comportement en traction a déjà été analysée indépendamment de la multifissuration de la matrice (chapitre 2 [figure 1.25](#), [figure 2.6](#)). Il est utile de comprendre leur influence sur la courbe de comportement en considérant la multifissuration de la matrice.

On rappelle que la contrainte σ^{ci} s'écrit à partir de G_i^c (Équation 1.80, p. 69). L'influence de l'énergie de rupture G_i^c et du coefficient de frottement μ est étudiée ([figure 3.9a](#) et [b](#)).

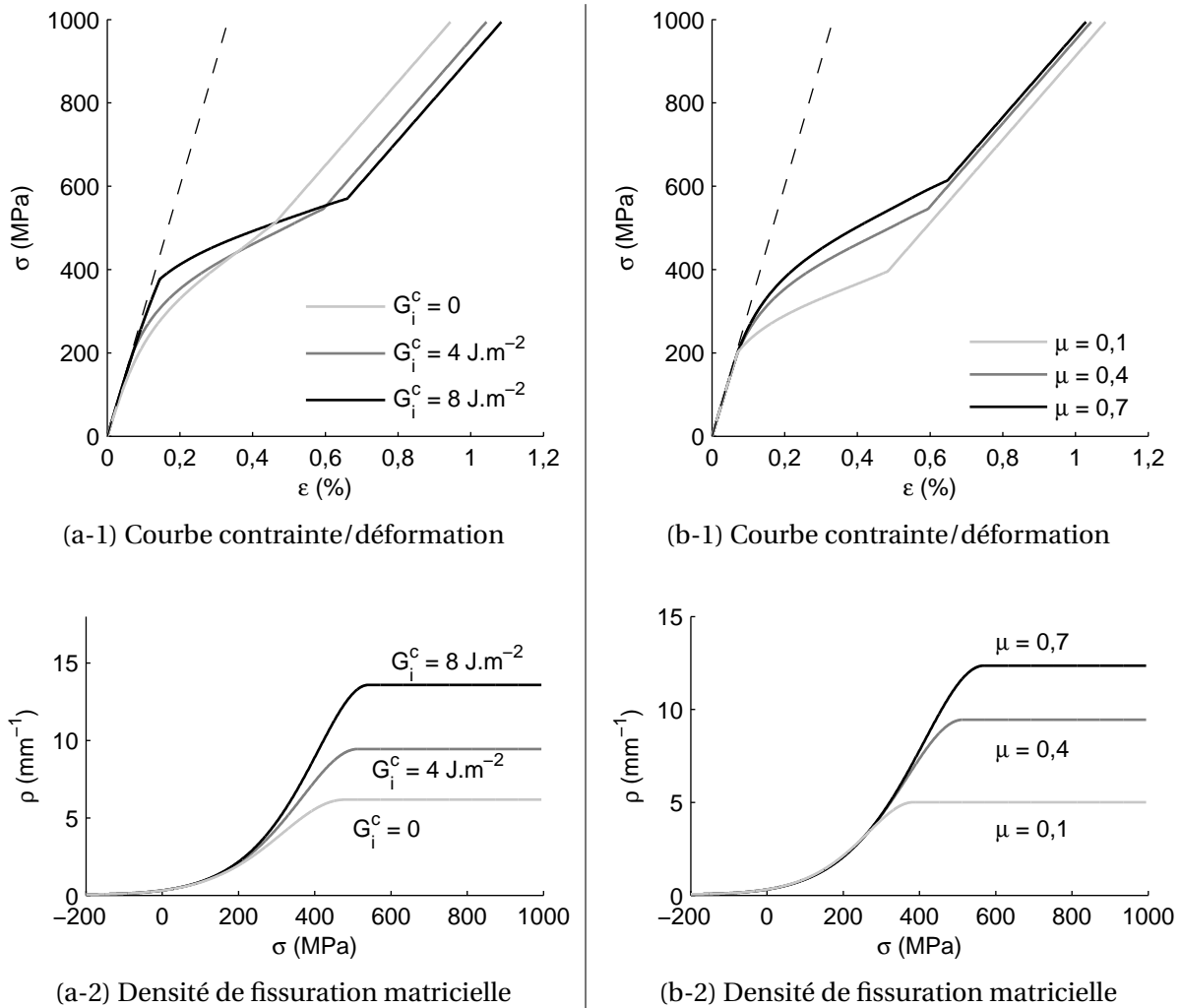


Figure 3.9 – Réponse en traction du minicomposite de longueur $L_0 = 20 \text{ mm}$ avec $N_f = 500$ fibres. Les paramètres de Weibull sont $\sigma_{max,0} = 11 \text{ MPa}$ et $m = 5,5$. L'influence de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et du coefficient de frottement μ est étudiée.

D'abord on observe que la limite élastique dépend clairement de l'énergie G_i^c , plus précisément du début de la propagation de la décohesion ([figure 3.9a-1](#)). D'autre part, le coefficient de frottement μ n'a aucun effet sur la limite élastique ([figure 3.9b-1](#)).

L'énergie de rupture G_i^c et le coefficient de frottement μ retardent la propagation de la décohesion, ce qui est responsable du ralentissement de la densité de fissures matricielles ([figure 3.9a-2](#) et [b-2](#)). Une énergie G_i^c ou un coefficient de frottement μ élevé donnera alors une densité de fissuration à rupture plus élevée.

Fraction volumique de fibres

Enfin, l'influence de la fraction volumique de fibre V_f , lors de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion, a déjà été étudiée (figure B-6a, figure 1.30a). Néanmoins la statistique de Weibull prend en compte le volume de matrice à fissurer dans la distribution des contraintes à rupture σ_{max} . L'étude de la fraction volumique de fibres sur la multifissuration matricielle est utile pour analyser les essais de traction des minicomposites et réaliser l'identification des propriétés à rupture.

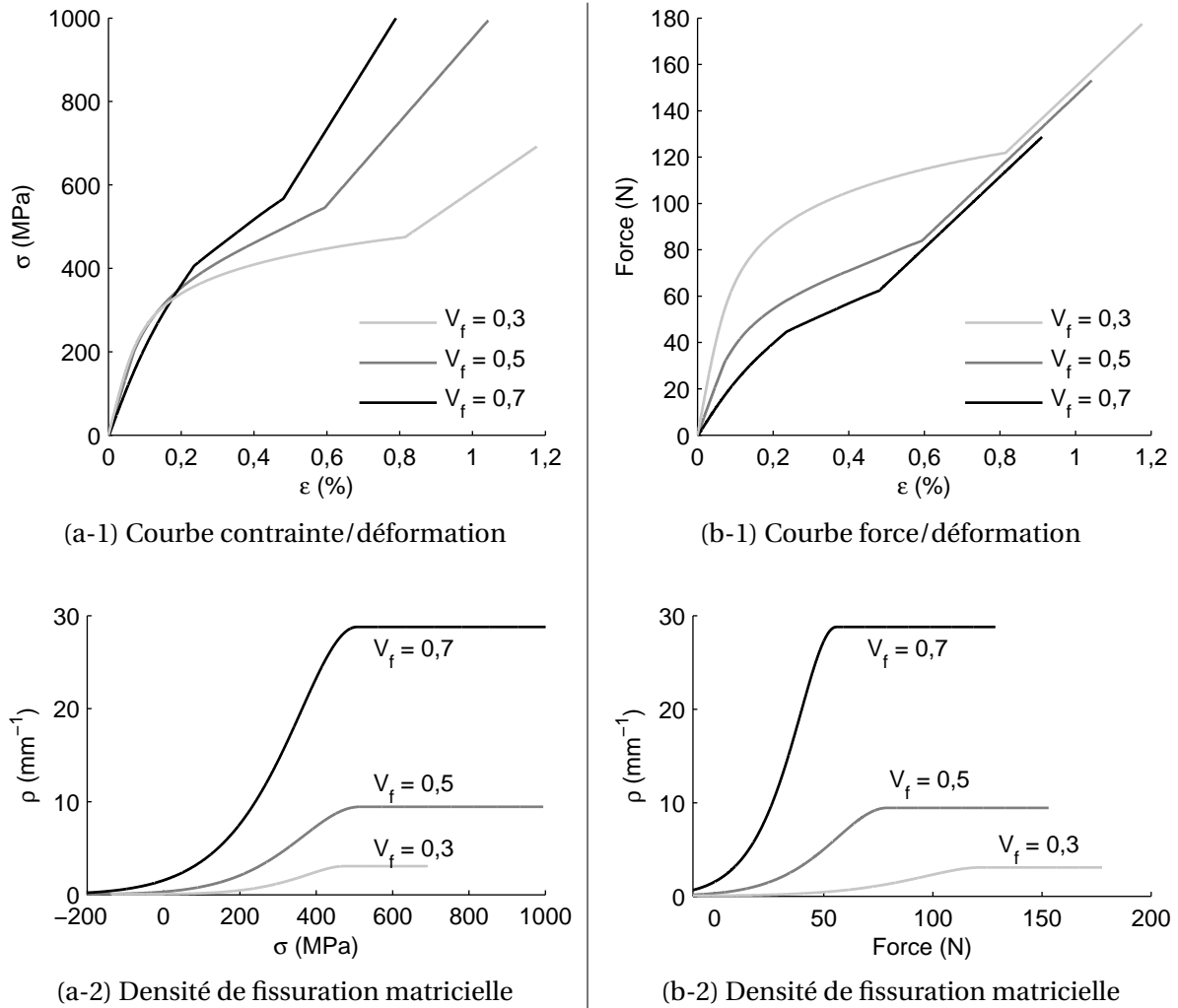


Figure 3.10 – Réponse en traction du minicomposite de longueur $L_0 = 20$ mm avec $N_f = 500$ fibres. Les paramètres de Weibull sont $\sigma_{max,0} = 11$ MPa et $m = 5,5$. L'énergie de rupture de l'interface est G_i^c et la contrainte $\sigma_\mu = 30$ MPa.

Les simulations présentées figure 3.10 sont obtenues pour un même nombre de fibres $N_f = 500$ et un rayon de fibres identique $R_f = 7 \mu\text{m}$. La section de fibre $S_f = N_f \pi R_f^2$ est alors inchangée et la variation de fraction volumique de fibre V_f résulte de la section de matrice $S_m = N_f \pi (R_m^2 - R_f^2)$. Le taux V_f se calcule par le rapport $V_f = \frac{R_f^2}{R_m^2}$. La réponse en traction est présentée en contrainte (figure 3.10a) et en force (b).

Le module initial $E_0 = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$ du minicomposite est plus élevé avec un V_f faible parce que la matrice est plus rigide que la fibre ($E_m > E_f$). La réponse en traction force/déformation (b-1) présente aussi une pente initiale plus élevée avec une fraction volumique de fibre V_f faible. Ceci est vrai dans le cas présent où la diminution de V_f résulte de

l'augmentation de la section de matrice à section de fibre constante. Cette pente initiale F_0 s'exprime par $F_0 = E_f S_f + E_m S_m$.

L'évolution du nombre de fissures matricielles est sensible à la fraction volumique de fibres V_f : on sait déjà qu'un V_f faible favorise l'amorçage des fissures matricielles. La densité de fissures à saturation de l'endommagement est aussi plus importante (figure 3.10a-1 et a-2). On s'attend à retrouver la même tendance à partir des observations expérimentales. La connaissance des caractéristiques élémentaires du minicomposite (E_f , E_m , V_f) est nécessaire non seulement pour exprimer les propriétés mécaniques du minicomposite (module élastiques, déformations résiduelles) mais aussi pour modéliser la cinétique de fissuration matricielles, de l'amorçage des premières fissures jusqu'à la densité de fissuration à saturation.

II.4 Bilan

L'objectif de cette partie était de développer un modèle de minicomposite en traction à partir des propriétés mécaniques du minicomposite, des lois d'amorçage de la fissure matricielle et de propagation de la décohésion. On obtient la courbe de comportement en traction, la densité moyenne de fissures matricielles et l'évolution de la longueur de décohésion en utilisant les propriétés des constituants élémentaires (fibres, matrice, interface).

D'abord, un premier modèle du minicomposite en traction est présenté, fondé sur une approche par tirages aléatoires des contraintes à rupture de la matrice. La multifissuration de la matrice est contrôlée par la distribution des contraintes à rupture dans la matrice. La théorie statistique de Weibull est utilisée.

Les résultats de ce modèle présentent aussi une bonne corrélation avec les simulations réalisées à l'aide du modèle de zones cohésives. La décohésion interfaciale, qui accompagne les fissures matricielles, empêche certaines fissures potentielles de s'amorcer. L'évolution du nombre de fissures est alors ralentie. Le pas de fissuration matricielle à saturation de l'endommagement dépend alors fortement des propriétés de l'interface.

Les simulations obtenues à partir de l'algorithme par tirages aléatoires sont comparées à deux modèles existants.

Ensuite une expression est proposée pour l'évolution de la densité de fissuration moyenne $\rho(\sigma)$ en fonction de la contrainte σ appliquée sur le minicomposite. Cette relation récursive fait directement intervenir les propriétés à rupture de la matrice (module de Weibull m et norme $\sigma_{max,0}$), l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et le coefficient de frottement μ .

La déformation axiale $\varepsilon(\sigma, \rho(\sigma), d(\sigma))$ du minicomposite en traction peut être calculée à partir de la connaissance des deux mécanismes d'endommagement $\rho(\sigma)$ et $d(\sigma)$ qui sont exprimés. Le comportement en traction se détermine alors à l'aide des trois relations, $\rho(\sigma)$ (3.13), $d(\sigma)$ (2.34) puis $\varepsilon(\sigma, \rho(\sigma), d(\sigma))$ (2.35).

Les expressions des deux évolutions de l'endommagement $\rho(\sigma)$ et $d(\sigma)$ pourront être directement utilisées pour établir la loi de comportement endommageable 3D du fil. Ces expressions sont données à partir des caractéristiques du minicomposite et des propriétés à rupture de la matrice et de l'interface. A ces évolutions de l'endommagement seront ajoutées les propriétés mécaniques du fil endommagé, dans toutes les directions (3D), pour former la loi de comportement. Il faut à présent identifier les paramètres de la loi statistique de Weibull, ainsi que l'énergie de rupture et le coefficient de frottement. Pour cela, on utilise les essais de traction sur minicomposite.

III Identification de l'énergie à rupture de l'interface, du coefficient de frottement et des paramètres de la loi de fissuration matricielle

On souhaite comparer la réponse en traction, obtenue à partir du modèle, avec le résultat d'essais de traction sur minicomposite.

III.1 Essais de traction sur minicomposites

Caractéristiques des minicomposites élaborés

Les minicomposites étudiés sont constitués d'une mèche de fibres SiC (Nicalon), d'une matrice SiC et d'une interphase de pyrocarbène infiltrées au sein de la mèche par le procédé CVI [Etchart-Salas et al., 2011]. Les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice sont présentées dans le tableau 3.2.

R_f	$7 \mu m$	E_m	400 GPa	ν_m	0,2	α_m	$4,6.10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$	ΔT	- 1000 $^\circ C$
		E_f	200 GPa	ν_f	0,2	α_f	$2,9.10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$		

Tableau 3.2 – Caractéristiques des minicomposites élaborés.

Ces minicomposites sont élaborés dans des conditions identiques. Trois lots de minicomposites (lot A, lot B et lot C) sont considérés et correspondent à différentes épaisseurs de matrices infiltrées au sein de mèches de fibres sèches. La surface de la section de matrice varie pour ces différents lots. Ceux-ci sont classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés de densification par la matrice infiltrée. Le lot A contient plus de matrice que le lot B qui en contient plus que le lot C.

Estimation des surfaces de fibres et de matrice sur une section de minicomposite

On note S_f et S_m les surfaces respectives de fibres et de matrice sur une section du minicomposite. Deux méthodes ont été utilisées pour mesurer les valeurs de S_f et S_m pour chaque lot de minicomposites :

- Deux prises de masse sont effectuées : une sur la mèche sèche de fibres avant la densification, la seconde après la densification. Ces prises de masses sont réalisées sur l'ensemble des minicomposites de chaque lot.
- Les sections S_f et S_m ont aussi été mesurées par analyse d'images sur des micrographies des minicomposites élaborés. Plusieurs découpes perpendiculaires à l'axe des fibres permettent la détermination de valeurs moyennes des sections S_f et S_m .

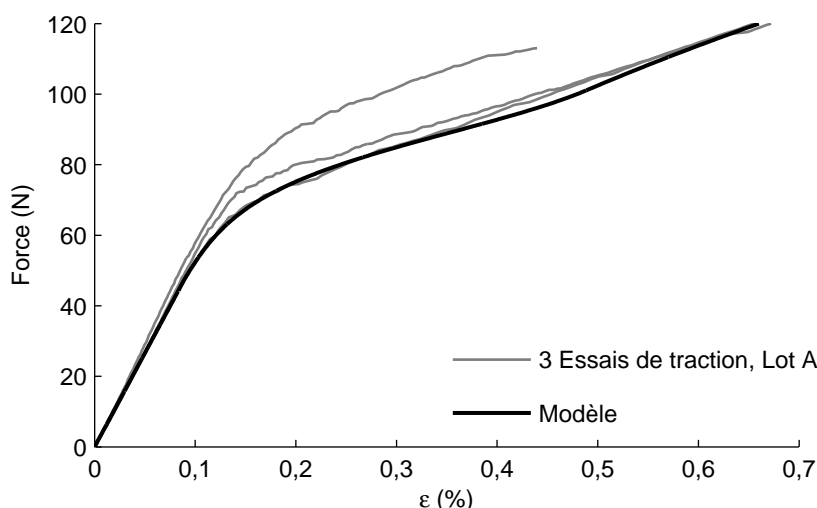
On note que ces minicomposites possèdent un taux de porosité assez élevé en comparaison des taux de porosité observés au sein des fils et torons d'une préforme tissée et densifiée par les procédés classiques d'élaboration.

La réalisation des essais de traction sur ces minicomposites requiert de connaître la complaisance de la machine de traction. En effet, la rigidité du bâti en acier de la machine de traction est du même ordre de grandeur que la rigidité des minicomposites. La complaisance machine a donc préalablement été mesurée.

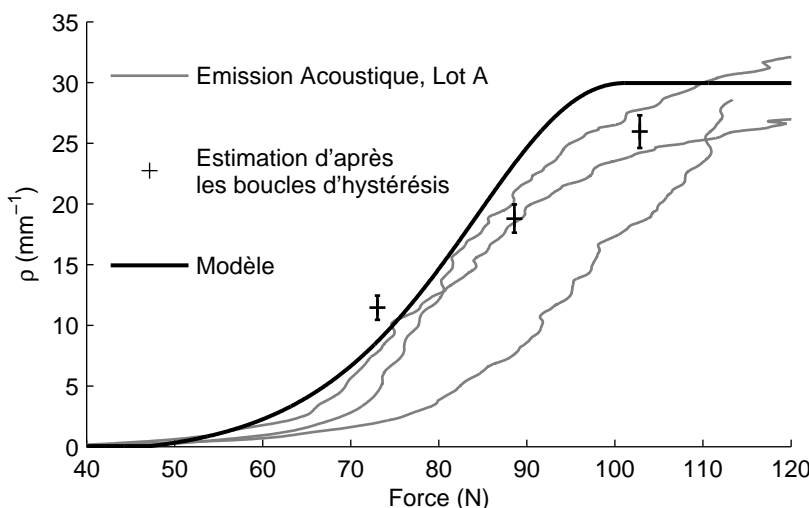
Estimation de l'évolution de la densité de fissuration au cours des essais de traction sur les minicomposites

Trois méthodes sont utilisées pour estimer le pas de fissuration matricielle moyen au cours des essais de traction sur minicomposites :

- Le banc de traction est équipé de capteurs acoustiques. L'émission acoustique (EA) résulte de la fissuration des constituants fragiles et des phénomènes induits par cette fissuration : fissuration matricielle, propagation de la décohésion et glissement frottant, rupture des fibres en fin de traction. L'EA est acquise à l'aide de ces capteurs. On suppose que le nombre de coups cumulés est proportionnel à la densité de fissuration matricielle. L'évolution de celle-ci est alors estimée par l'utilisation de l'EA combinée à la mesure de la densité de fissures matricielles à rupture du minicomposite.
- Quelques essais de traction ont été réalisés sous MEB (Microscope Electronique à Balayage). Les fissures matricielles sont ouvertes puisque le minicomposite est chargé en traction. Elles sont donc visibles sur les images MEB. L'analyse des clichés enregistrés lors de ces essais permet d'estimer les distances entre deux fissures et de déterminer un pas de fissuration moyen. Ces clichés MEB sont réalisés pour plusieurs niveaux de chargement en traction. On obtient ainsi une évaluation de la densité de fissuration au cours de l'essai de traction sur le minicomposite.



(a) Réponse en traction



(b) Evolution de la densité de fissuration

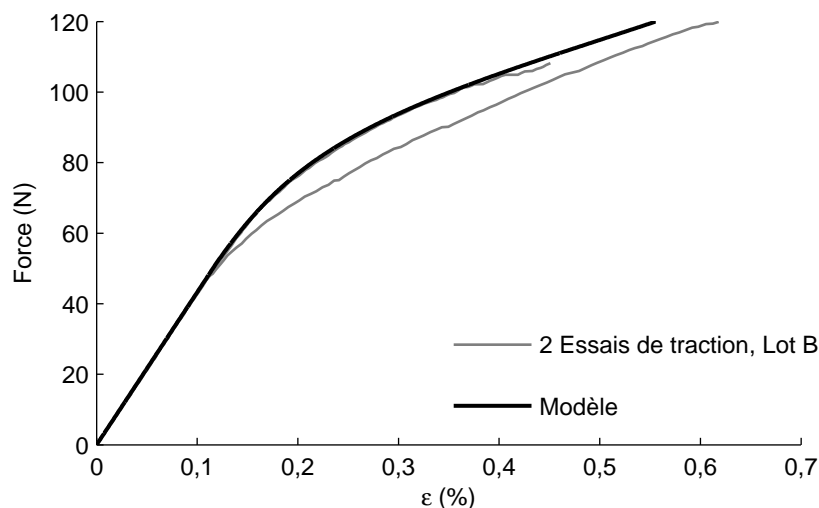
Figure 3.11 – Essais de tractions sur les minicomposites du **lot A**. Comparaison avec le modèle.

- Enfin on propose aussi d'utiliser les boucles d'hystérésis obtenues lors d'essais de traction cyclée. Les boucles d'hystérésis ont déjà été analysées précédemment et permettent de faire le lien entre le pas de fissuration matricielle et le module tangent noté E^* (chapitre 2, figure 2.25, p.105). Le pas de fissuration moyen est alors évalué à partir du module E^* mesuré lors de l'analyse des boucles.

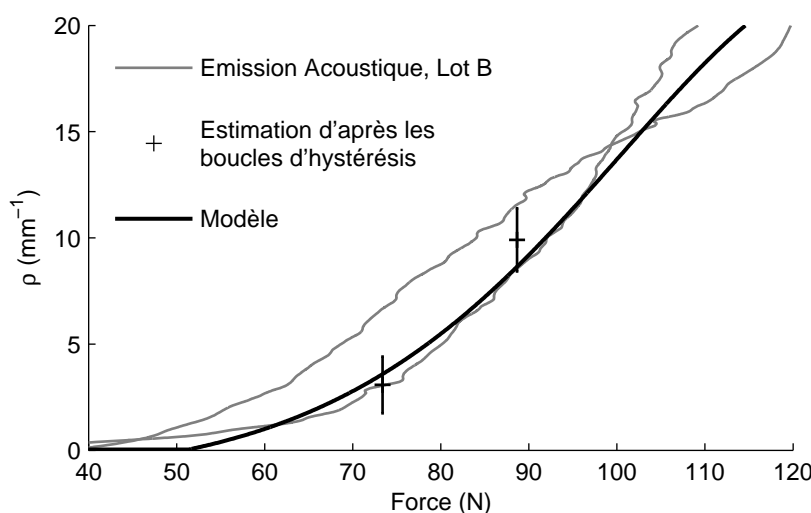
III.2 Identification des propriétés

La modélisation de la réponse du minicomposite en traction, à l'aide des expressions développées, demande d'identifier les propriétés suivantes :

- Les propriétés de l'interface : l'énergie de rupture G_i^c et le coefficient de frottement μ ,
- Les paramètres de la loi statistique de Weibull pour la multifissuration de la matrice : module m et contrainte seuil $\sigma_{max,0}$.



(a) Réponse en traction



(b) Evolution de la densité de fissuration

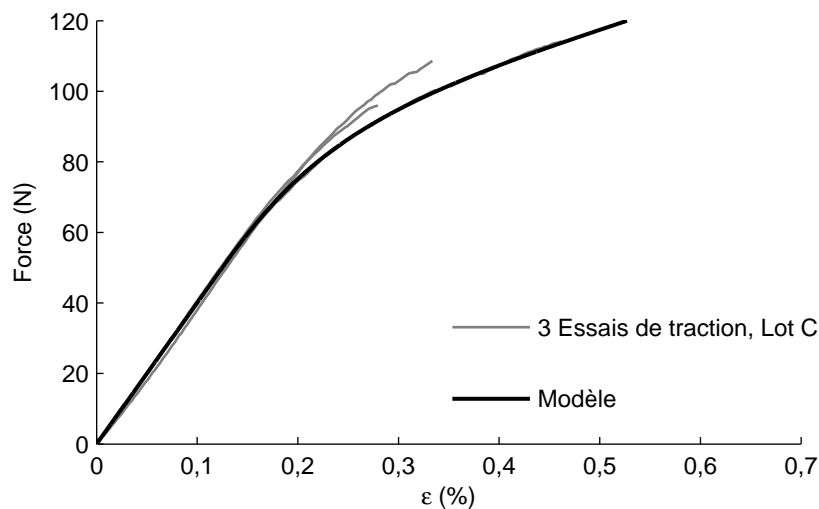
Figure 3.12 – Essais de tractions sur les minicomposites du **lot B**. Comparaison avec le modèle.

Méthodes d'identification

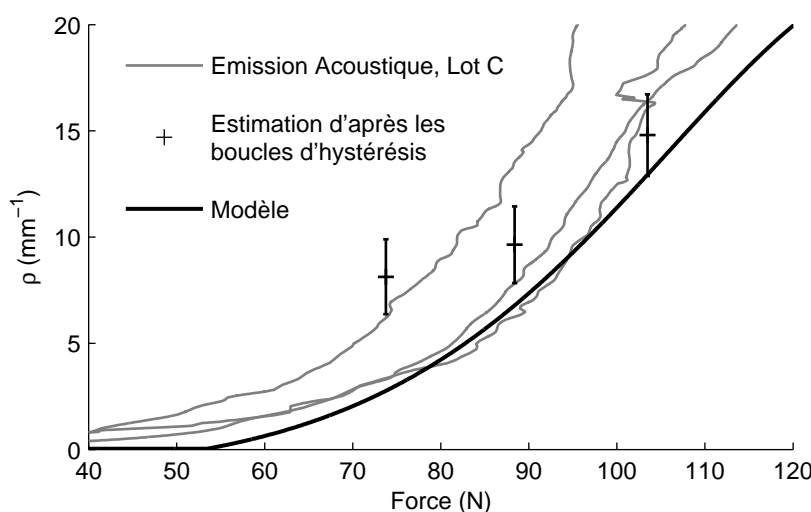
Ces propriétés sont évaluées par la comparaison entre les résultats d'essais de traction et le modèle développé. On utilise les essais de traction sur les minicomposites pour l'identification de ces propriétés. Les données utilisées sont :

- la réponse en traction résultant des essais sur minicomposites,
- l'évolution de la densité de fissuration au cours du chargement de traction.

L'énergie de rupture de l'interface et le coefficient de frottement sont identifiés en premier. Pour cela, on utilise l'expression de l'évolution de la décohésion $d(\sigma)$ (2.34, p.107) et de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ (2.35, p.107). L'évolution de la densité de fissuration $\rho = 1/L$ en est déduite telle que la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d(\sigma))$ soit égale à la déformation obtenue lors de l'essai de traction. Les valeurs de G_i^c et μ sont évaluées de sorte que l'écart entre les densités de fissuration, obtenues sur l'essai de traction et à partir du modèle, soit le plus faible possible.



(a) Réponse en traction



(b) Evolution de la densité de fissuration

Figure 3.13 – Essais de tractions sur les minicomposites du **lot C**. Comparaison avec le modèle.

Les paramètres de la loi statistique de Weibull sont estimés dans un second temps. Pour cela, on considère l'évolution de la densité de fissuration du minicomposite au début de l'essai de traction, lorsque les décohésions interfaciales sont de faibles longueurs. On suppose alors que les décohésions n'ont pas d'effet sur l'évolution de la fissuration matricielle en fonction de la force appliquée. Dans ces conditions, on rappelle que le nombre de fissures matricielles peut être exprimé par

$$n_{fiss} = \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{max,0}} \right)^m \frac{V_0}{V_{ref}} \quad \text{avec} \quad V_0 = S_m L_0. \quad (3.19)$$

S_m est la surface de matrice sur une section du minicomposite. Le volume de référence $V_{ref} = 1 \text{ m}^3$. En considérant la densité de fissures matricielles $\rho(\sigma) = n_{fiss}/L_0$, cette relation devient

$$\log(\rho) = m \log(\sigma_{max}) - m \log(\sigma_{max,0}) + \log\left(\frac{S_m}{V_{ref}}\right) \quad \text{avec} \quad \sigma_{max} = \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} (\sigma + \sigma^T). \quad (3.20)$$

Le module m et la contrainte seuil $\sigma_{max,0}$ sont alors identifiés en traçant l'évolution de $\log(\rho)$ en fonction de $\log(\sigma_{max})$ au début des essais de traction.

Comparaison essais/modèle, propriétés identifiées

Les propriétés sont identifiées à l'aide de la démarche décrite précédemment et à partir des essais réalisés pour les trois lots de minicomposites (figure 3.11, 3.12 et 3.13). Les valeurs estimées sont présentées dans le tableau 3.3.

	Lot A	Lot B	Lot C
Energie de rupture	$G_i^c = 6 \text{ J.m}^{-2}$		
Coefficient de frottement			
	$\mu = 1,5$	$\mu = 1,5$	$\mu = 2$
Module de Weibull	$m = 9,3$	$m = 5,9$	$m = 6$
Contrainte seuil	$\sigma_{max,0} = 52 \text{ MPa}$	$\sigma_{max,0} = 14,5 \text{ MPa}$	$\sigma_{max,0} = 17 \text{ MPa}$

Tableau 3.3 – Propriétés identifiées pour chaque lot de minicomposites.

De plus, l'énergie de rupture de l'interface a aussi été estimée par l'analyse d'essais de micro-indentation de type « push-out » [Herbreteau et al., 2012]. Des composites tissés SiC/SiC ont été utilisés pour ces essais. L'essai consiste à appliquer une pression au centre d'une fibre à l'aide d'un indenteur. La force et le déplacement appliqués par l'indenteur sont mesurés lors de l'essai. D'abord une première phase de compression élastique de la fibre est observée. Ensuite, celle-ci commence à glisser. Le seuil de force appliquée par l'indenteur permettant le glissement de la fibre, est mesuré.

Parallèlement, une analyse par éléments finis (EF) a été réalisée pour déterminer le taux de restitution d'énergie lors de la propagation de la décohésion à l'interface fibre/matrice. L'énergie de rupture de l'interface en est déduite en utilisant le seuil de force qui entraîne le glissement de la fibre. Les valeurs de G_i^c ainsi estimées sont de l'ordre de 2 à 6 J.m^{-2} .

IV Ouvertures de fissures

L'ouverture des fissures matricielles ΔU a aussi été exprimée en fonction du chargement de traction, des longueurs de décohésion interfaciale $d(\sigma)$ et du coefficient de frottement μ (2.37, p.107).

La figure 3.14 représente l'ouverture des fissures modélisées pour les trois lots de mini-composites, à partir de leurs caractéristiques et des propriétés identifiées. On remarque que les valeurs des ouvertures de fissures sont plus faibles que les mesures de ΔU effectuées lors des essais de traction sous MEB.

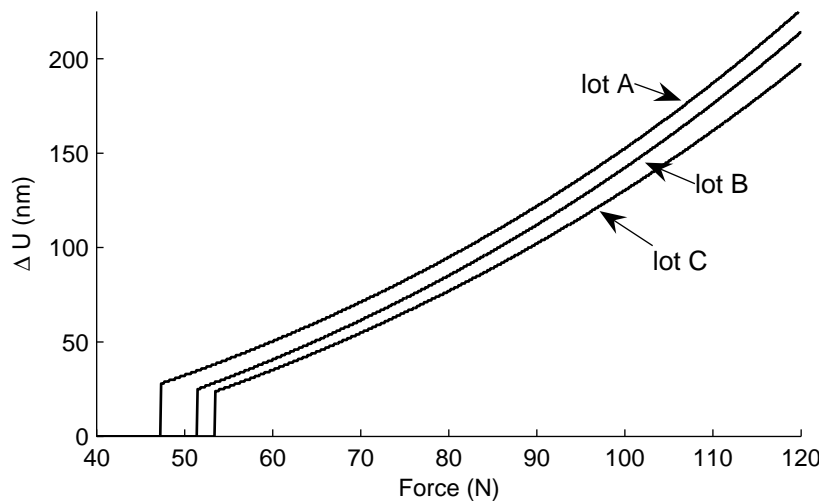


Figure 3.14 – Ouvertures des fissures matricielles avec la force appliquée pour les trois lots de mini-composites.

Conclusion

Ce chapitre était consacré à la modélisation du comportement en traction des minicomposites, en tenant compte de la multifissuration de la matrice. La loi statistique de Weibull est utilisée pour l'amorçage progressif des fissures. Un pas de fissuration moyen et un comportement moyen sont considérés. La densité de fissures matricielles a été exprimée à partir des paramètres de Weibull m et $\sigma_{max,0}$ par la relation itérative

$$\rho(\sigma(i)) = \frac{1}{L_0} \frac{V_0}{V_{ref}} \frac{(\sigma_{max}(i))^m - (\sigma_{max}(i-1))^m}{\sigma_{max,0}^m} [1 - d_r(\sigma(i))\rho(\sigma(i-1))] + \rho(\sigma(i-1))$$

$$\text{avec } \sigma_{max} = \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} (\sigma + \sigma^T) . \quad (3.21)$$

L'effet de l'évolution de la décohésion interfaciale est prise en compte dans la relation (3.21).

Le modèle du minicomposite sollicité en traction est alors obtenu par l'expression de la densité de fissures matricielles $\rho(\sigma)$ (3.21), de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ et de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L = 1/\rho(\sigma), d(\sigma))$ (2.35, p.107).

Ces expressions permettent de représenter le comportement moyen du minicomposite en traction. La réponse en traction est satisfaisante par comparaison avec le modèle par tirages aléatoires développé également dans ce chapitre.

Le résultat a aussi été comparé à deux modèles déjà existant qui utilisent également la loi de Weibull pour l'amorçage progressif des fissures dans la matrice. Pour cela, le modèle de transfert de contrainte linéaire a été considéré, avec le cisaillement interfacial caractéristique τ .

Le modèle a aussi été confronté aux essais de traction sur minicomposites. On a comparé à la fois la réponse en traction et l'évolution de la densité de fissures matricielles avec le chargement de traction.

On en a déduit des valeurs de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c , du coefficient de frottement μ , ainsi que des paramètres m et $\sigma_{max,0}$ de la loi de Weibull.

La densité de fissuration $\rho(\sigma)$ (3.21) et $d(\sigma)$ (2.34) observées avec les propriétés identifiées nous donne l'évolution des deux variables d'endommagement dans le fil en traction. Ces deux relations seront utilisées au cours du chapitre 4 pour l'élaboration de la loi d'endommagement 3D du fil. La connaissance des propriétés mécaniques 3D du fil endommagé est nécessaire pour modéliser le comportement du fil dans le composite tissé.

Bibliographie

- CASTELIER, E., L. GÉLÉBART, L. C. et C. LANTUÉJOUL. 2010, «Three consistent approaches of the multiple cracking process in 1D composites», *Composites Science and Technology*, vol. 70, n° 15, p. 2146–2153. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2010.08.014>.
- ETCHART-SALAS, R., S. JACQUES, A. CORADI et E. MARTIN. 2011, *Elaboration et caractérisation mécanique de composites à matrice céramique unidirectionnels*, Congrès J.N.C. 17, Poitiers, juin 2011. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00597927/>.
- HERBRETEAU, M., S. JOUANNIGOT, P. WEISBECKER, A. CORADI et E. MARTIN. 2012, *A new push-out procedure for the evaluation of interfacial properties of SiC/SiC composites*, 15th European Conference on Composite Materials, Venise, Italie, juin 2012. URL <http://www.escm.eu.org/eccm15/data/assets/129.pdf>.
- HUI, C.-Y., S. L. PHOENIX et D. SHIA. 1997, «The single-filament-composite test : A new statistical theory for estimating the interfacial shear strength and weibull parameters for fiber strength», *Composites Science and Technology*, vol. 57, n° 12, p. 1707–1725. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0266-3538\(97\)00103-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0266-3538(97)00103-6).
- LISSART, N. et J. LAMON. «Damage and failure in ceramic matrix composites : experimental study and model», *Acta Mater.*, vol. 45.
- RAPAUD, O. 2002, *Nouvelles interphases pour matériaux composites céramiques : revêtement multicouches nanoséquencés (PyC/TiC)_n*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard - Lyon 1. URL <http://www.theses.fr/2002LY010169>.
- VAGAGGINI, E., J. DOMERGUE et A. G. EVANS. 1995, «Relationships between hysteresis measurements and the constituent properties of ceramic matrix composites : I, Theory», *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 78, n° 10, p. 2709–2720. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1151-2916.1995.tb08046.x>.

Chapitre 4

Loi de comportement d'un minicomposite SiC/SiC et rupture en traction

Sommaire

Introduction	142
I Loi de comportement du minicomposite	143
I.1 Démarche et hypothèses	143
I.2 Volume élémentaire représentatif du fil endommagé	144
Caractéristiques du fil	144
Répartition des fibres	144
Maillage périodique	145
Insertion des fissures dans le maillage 3D	146
I.3 Analyse Eléments Finis	147
Propriétés élastiques des constituants du fil	147
Détermination du tenseur des rigidités	148
I.4 Evolution des propriétés élastiques du minicomposite	150
Evolution en fonction de l'endommagement	151
I.5 Procédure automatique pour le calcul des propriétés élastiques	155
I.6 Ecriture explicite de la loi de comportement du fil	156
I.7 Bilan	158
II Rupture du minicomposite ou du fil en traction	159
II.1 Modèle de zones cohésives et approche statistique de la rupture	159
II.2 Rupture successive des fibres	161
Evolution du nombre de fibres rompues	162
II.3 Contrainte à rupture du volume élémentaire	164
Distribution des contraintes à rupture du VER	164
Influence de la répartition des fibres	165
Nombre de fibres dans le volume élémentaire	166
Influence de la longueur de décohesion	167
II.4 Rupture : Bilan et perspectives	168
Conclusion	169
Bibliographie	170

Introduction

L'objectif de ce travail de thèse est de modéliser l'évolution de la fissuration au sein du composite tissé en traction (figure 4.1). Les fils longitudinaux et transversaux seront homogénéisés à l'échelle mésoscopique. Ce chapitre 4 est consacré au développement d'une **loi de comportement endommageable des fils** longitudinaux.

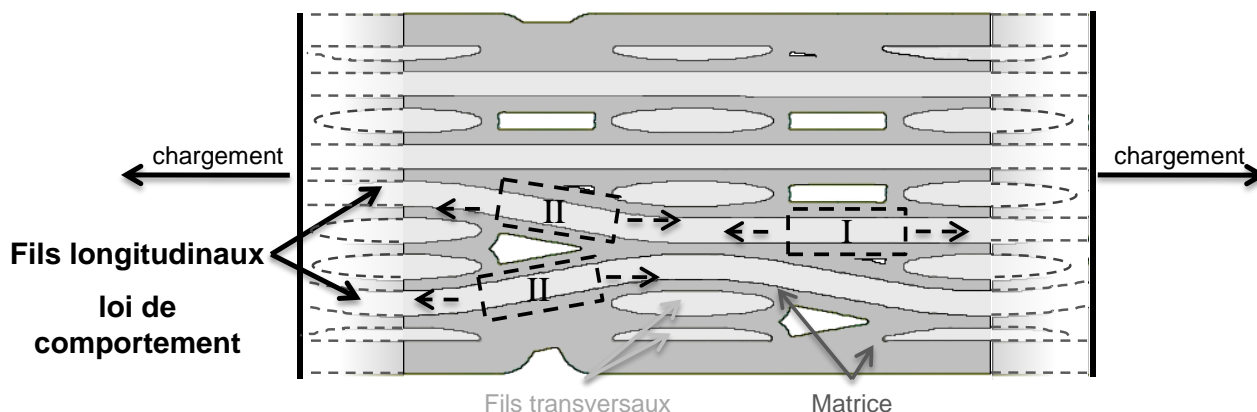


Figure 4.1 – Représentation du composite tissé.

Pour définir cette loi de comportement endommageable des fils, on propose d'utiliser l'évolution de la fissuration dans le minicomposite en traction, modélisée au chapitre précédent. L'usage de ces lois d'endommagement doit s'accompagner du calcul du comportement mécanique du fil contenant les fissures. Les deux éléments à considérer sont alors :

- les **lois d'évolution de la fissuration matricielle et de la décohésion interfaciale** du minicomposite en traction (chapitre 3). La densité de fissuration matricielle $\rho(\varepsilon_{11})$ et la décohésion interfaciale $d(\varepsilon_{11})$ ont été modélisées en fonction de la déformation axiale, notée à présent ε_{11} .

Les deux variables d'endommagement $\rho(\varepsilon_{11})$ et $d(\varepsilon_{11})$ ont été exprimées uniquement à partir des propriétés mécaniques des fibres, de la matrice, de l'interface, ainsi que de leurs propriétés à rupture.

- le deuxième point concerne le **calcul du comportement mécanique du fil endommagé**. On considère un volume élémentaire du fil comportant les fissures matricielles et la décohésion interfaciale.

La réponse mécanique de la cellule élémentaire du fil sollicitée en traction dans la direction axiale a déjà été exprimée. A présent, il est nécessaire de modéliser l'influence de l'endommagement sur les rigidités du fil.

On propose alors une procédure de calculs par Eléments Finis (EF) pour déterminer les propriétés mécaniques du fil contenant les fissures. Ces calculs demandent de générer les maillages 3D représentatifs du fil endommagé.

La deuxième partie de ce chapitre concerne la **rupture des fibres** dans le minicomposite ou le fil en traction. On considère que la rupture des fibres intervient après l'endommagement de la matrice et la décohésion interfaciale. La rupture successive des fibres en traction est analysée par calculs EF par une approche statistique. On souhaite ainsi obtenir un critère de rupture des fils.

On vise à développer la loi de comportement endommageable du fil uniquement à partir des propriétés mécaniques et des propriétés à rupture des constituants élémentaires du fil (fibres, matrice et interface).

I Loi de comportement du minicomposite

I.1 Démarche et hypothèses

Endommagement et direction de chargement

Pour développer la loi de comportement endommageable des fils, on souhaite utiliser l'évolution de l'endommagement modélisée au chapitre précédent. La densité de fissuration matricielle $\rho(\varepsilon_{11})$ et longueur de décohésion $d(\varepsilon_{11})$ ont été exprimées en fonction du chargement longitudinal ε_{11} . On considère alors seulement la fissuration d'un fil longitudinal qui résulte des sollicitations longitudinales.

Cette hypothèse est forte car au sein du composite tissé en traction, l'embuvage et le tissage des fils induisent des sollicitations du fil dans les directions longitudinales et aussi transversales (figure 4.1, région II). **La loi de comportement développée ne pourra donc pas rendre compte de l'endommagement issu des sollicitations autres que longitudinales.**

Pour enrichir cette loi de comportement, on peut par exemple proposer une approche pour prendre en compte l'évolution de la décohésion dans le minicomposite soumis à des sollicitations transversales. Le minicomposite est alors chargé en traction ou compression dans la direction radiale. Le modèle de zones cohésives réalisé précédemment pour simuler l'évolution de la décohésion dans le minicomposite peut être utilisé à nouveau (figure 4.2).

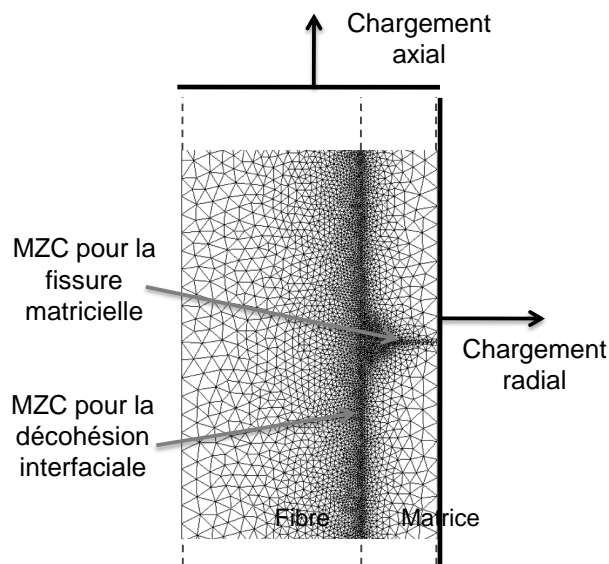


Figure 4.2 – Représentation 2D axisymétrique de la cellule élémentaire représentative du minicomposite et modèle de zones cohésives (MZC).

Le chargement dans la direction radiale aux fibres peut être rajouté. Cela permettrait d'obtenir l'évolution de la longueur de décohésion en fonction des deux directions de chargement axiale (longitudinale) et radiale (transversale).

Propriétés élastiques du fil endommagé

On considère un volume élémentaire représentatif du fil ou du minicomposite contenant les fissures matricielles et la décohésion interfaciale. Le comportement mécanique du minicomposite endommagé sollicité en traction a déjà été exprimé. Les contraintes résiduelles ainsi que le frottement à l'interface entre la fibre et la matrice ont été pris en compte.

Il est à présent nécessaire de modéliser le comportement du fil comportant les fissures, dans toutes les directions, axiales et transversales. Pour cela on utilise un maillage 3D représentatif du fil endommagé. Les contraintes résiduelles ainsi que le frottement à l'interface ne sont pas considérés. Dans ce cas, le fil contenant les fissures a un comportement élastique. On calcule alors uniquement les propriétés élastiques du fil endommagé. Les calculs EF permettent de déterminer la **matrice de rigidité du fil** en fonction de la densité de fissures matricielles ρ et de la longueur de décohésion d , notée $(C(\rho, d))$.

Le développement de la loi de comportement nécessite les étapes suivantes :

1. Génération des maillages EF,
2. Calcul des propriétés élastiques,
3. Détermination des lois d'évolution $C(\rho, d)$,
4. Implémentation de la loi de comportement dans le code de calcul EF.

Chacune de ces étapes est maintenant détaillée.

I.2 Volume élémentaire représentatif du fil endommagé

Les outils de maillage sont présentés. Ces procédures automatiques ont été réalisées par [Couégnat, 2008]. Une cellule 2D est d'abord générée en fonction des caractéristiques du fil et de la répartition des fibres (figure 4.3). Le volume 3D est obtenu par extrusion de la cellule 2D. Puis les fissures sont insérées dans le maillage 3D.

Caractéristiques du fil

D'abord la cellule 2D est réalisée. La cellule générée comporte une épaisseur de matrice homogène e_m autour des fibres. Les caractéristiques nécessaires pour créer le maillage sont :

- le nombre de fibres,
- le rayon des fibres R_f , la fraction volumique de fibres V_f ,
- l'épaisseur de matrice e_m autour des fibres,
- ainsi que la taille des éléments de maillage.

Répartition des fibres

L'outil de maillage permet de générer la position des fibres de manière périodique ou aléatoire.

Pour une **répartition périodique des fibres**, leurs positions sont calculées simplement en fonction du rayon et de la fraction volumique de fibres. La taille de la cellule générée dépend du nombre de fibres dans la cellule (figure 4.3a).

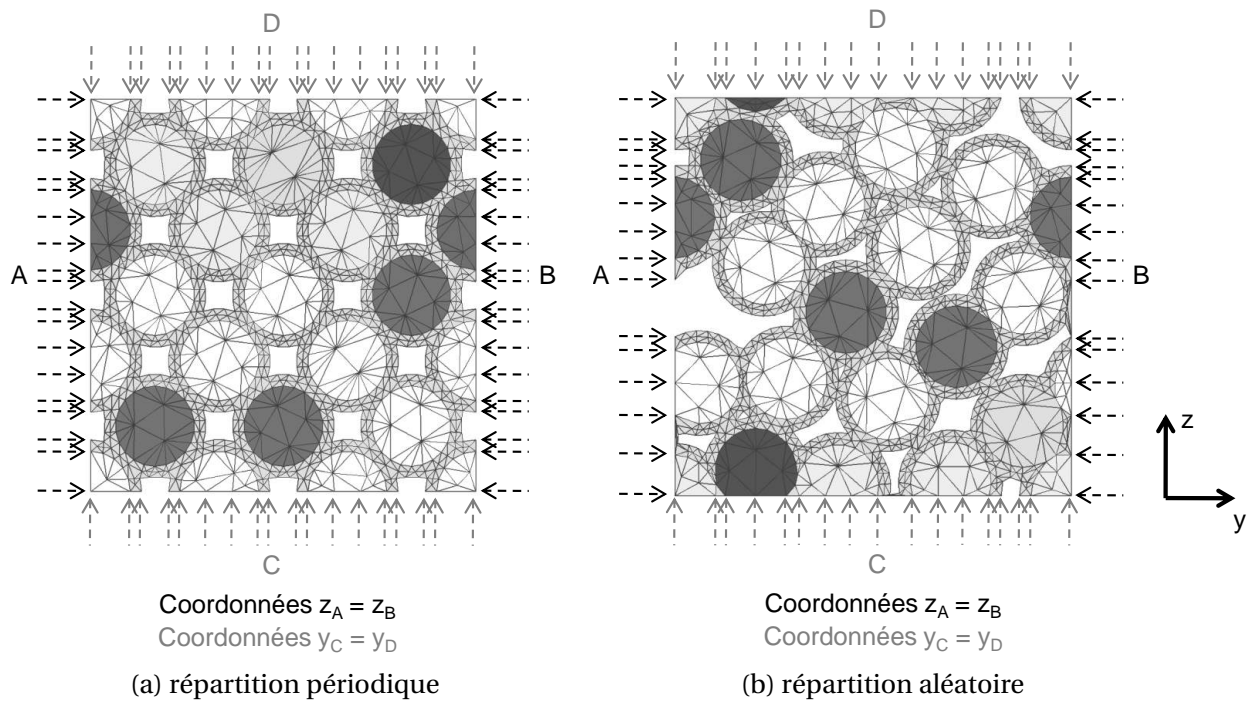


Figure 4.3 – Cellule 2D représentative du fil. Les fibres peuvent être réparties de manière périodique (a) ou aléatoire (b).

La **répartition aléatoire** du centre des fibres peut être réalisée à partir de la représentation périodique. Des itérations successives permettent de déplacer aléatoirement le centre des fibres jusqu'à atteindre le "désordre" souhaité. Cette procédure est rapide et permet de générer des fibres bien distinctes (figure 4.3b).

La cellule contenant les fibres réparties aléatoirement peut aussi être réalisée en effectuant un tirage aléatoire du centre des fibres. La taille de la cellule est d'abord calculée à partir du nombre, du rayon et de la fraction volumique de fibres. Ce tirage aléatoire du centre des fibres peut provoquer la superposition de leurs sections. La fraction volumique de fibres n'est alors pas respectée. Il est alors nécessaire de déplacer les fibres pour les séparer et obtenir le V_f souhaité. Pour cela, les fibres sont déplacées aléatoirement jusqu'à ce que l'écart entre le V_f obtenu et demandé atteigne la valeur fixée. Le nombre d'itérations nécessaires et le temps de calcul dépendent alors du nombre de fibres et de la précision imposée.

Après avoir généré la cellule contenant la position du centre de fibres, le maillage EF des fibres et de l'épaisseur de matrice e_m autour des fibres peut être réalisé. On voit alors apparaître les porosités. La **fraction volumique de matrice et de porosité** est déduite numériquement en considérant la surface occupée par les constituants. On note que les éléments de maillage sont des triangles dont la taille est paramétrable.

Maillage périodique

Les dimensions de la cellule 2D doivent être suffisantes pour représenter la répartition aléatoire des fibres. La cellule correspond à un **motif élémentaire périodique**. Le maillage est généré de façon à pouvoir assembler plusieurs cellules côte à côte (figure 4.3). Il y a autant de nœuds sur le bord gauche (A) et le bord droit (B). Chaque nœud du bord A correspond à un nœud du bord B et leurs coordonnées dans la direction z sont identiques. Il en est de même pour les nœuds du bord bas (C) et du bord haut (D). Cette périodicité du maillage de la cellule élémentaire sera utilisée pour déterminer la matrice de rigidité par analyse EF.

Insertion des fissures dans le maillage 3D

Le maillage 2D est ensuite extrudé pour obtenir le volume utilisé pour les calculs de contrainte. Les fissures sont insérées dans ce volume.

On considère que les fissures matricielles sont réparties périodiquement le long du fil ou du minicomposite. Le pas de fissuration matricielle est $L = \frac{1}{\rho}$. On suppose aussi que la décohésion interfaciale est répartie de façon homogène. Par symétrie, on peut alors représenter le fil endommagé à l'aide du volume de longueur L , contenant une fissure matricielle en son centre et la décohésion interfaciale de longueur d .

La cellule 2D est alors extrudée dans la direction longitudinale des fibres sur la distance L (figure 4.4). La fissure matricielle et la décohésion interfaciale sont insérées en utilisant l'outil GenCrack mis au point par [Couégnat, 2008] :

- La fissure matricielle est insérée dans toute la section de matrice, perpendiculairement aux fibres, à la distance $\frac{L}{2}$.
- La décohésion interfaciale entre les fibres et la matrice est insérée de part et d'autre de la fissure matricielle. La longueur de décohésion interfaciale d est paramétrable dans l'outil de maillage.

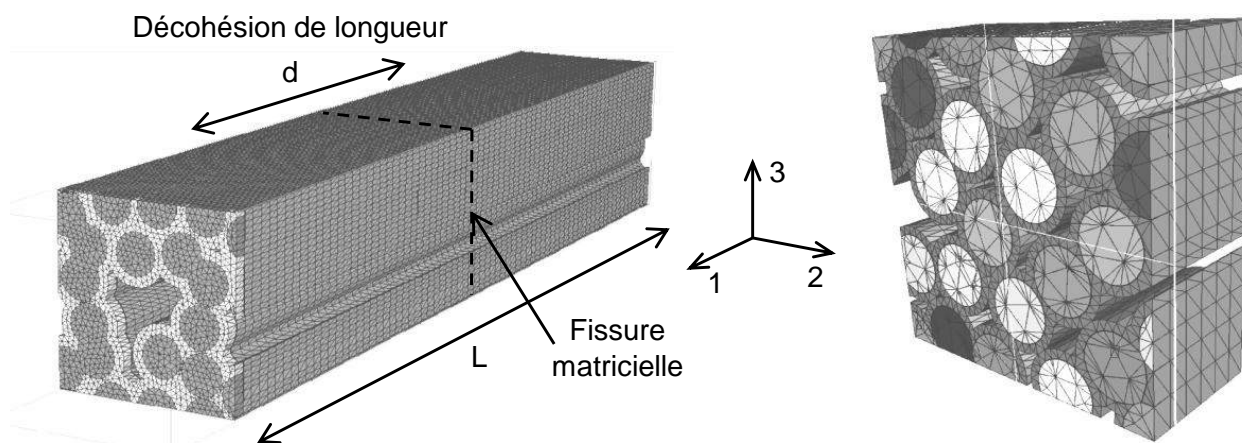


Figure 4.4 – Volume élémentaire représentatif du fil endommagé (VER).

Le maillage 3D est constitué de tétraèdres résultant de l'extrusion du maillage 2D formé par les éléments triangulaires. L'outil **GenCrack** procède d'abord par une sélection des éléments tétraédriques appartenant au plan de la fissure matricielle. Seuls les éléments de matrice sont pris en compte. Chaque tétraèdre est traité pour créer les nœuds à l'intersection avec le plan de la section. Enfin ces éléments sont remaillés en prenant en compte les nouveaux nœuds créés au point d'intersection. Ces nœuds sont dédoublés et un espacement est généré.

Pour insérer la décohésion interfaciale, les éléments de matrice à la frontière des fibres sont sélectionnés. Les nœuds frontaliers sont dédoublés ce qui génère la décohésion. La fissure est ouverte sur la distance imposée. L'outil de maillage permet ainsi d'insérer la décohésion à l'interface entre la matrice et les fibres sur la longueur d qui est paramétrable.

I.3 Analyse Eléments Finis

Propriétés élastiques des constituants du fil

L'objectif est de déterminer les propriétés élastiques du fil à partir de celles des constituants élémentaires (fibres et matrice). On considère que les fibres et la matrice céramique ont un **comportement élastique isotrope**, défini par les modules $E_f = 200$ GPa et $E_m = 400$ GPa ainsi que le coefficient de Poisson $\nu_f = 0,2$ et $\nu_m = 0,2$.

Matrice homogène équivalente

Le procédé d'élaboration du composite génère une matrice multicouche obtenue par dépôts successifs de différentes phases (figure 4.5a). On note que parmi la famille d'outils de maillage développée par [Couégnat, 2008], existe une fonctionnalité permettant de générer les différentes couches de matrice dans le maillage 2D.

Dans ce chapitre, le modèle proposé rend compte d'une épaisseur de matrice globale possédant des propriétés mécaniques homogénéisées et équivalentes à celles de la matrice multicouche (figure 4.5b).

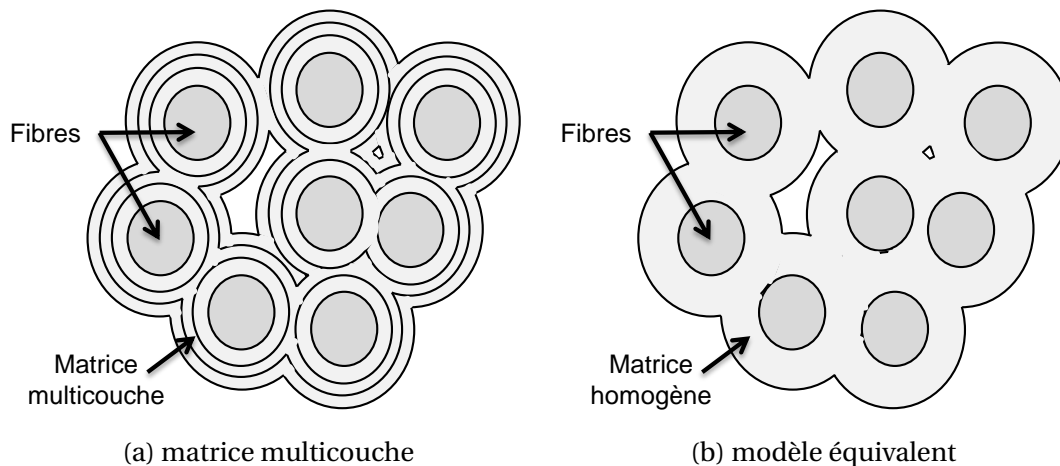


Figure 4.5 – Matrice multicouche au sein du minicomposite (a) et matrice homogène équivalente (b).

Comportement de la matrice

On considère dans cette étude un comportement isotrope de la matrice. Cependant il serait plus réaliste de définir un comportement anisotrope, compte tenu du caractère multicouche de la matrice sous forme de dépôts concentriques.

Dans ce cas, la matrice peut être beaucoup plus souple dans la direction radiale et ortho-radiale que dans l'axe des fibres (figure 4.6). Il conviendrait donc de prendre en compte un comportement isotrope transverse de la matrice.

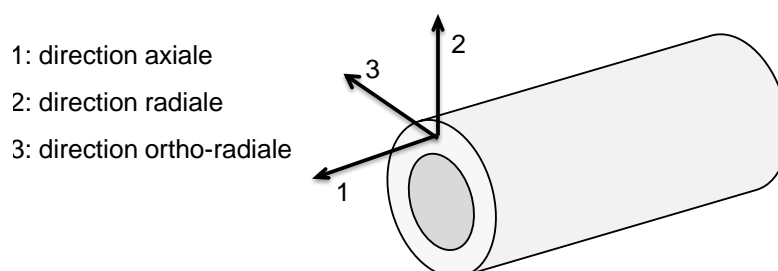


Figure 4.6 – Orientation de la matrice.

Cela demande de définir l'orientation des éléments de matrice lors du calcul EF. Cette opération est réalisée lors de la génération du maillage 2D [Coradi, 2009].

La prise en compte d'un comportement plus souple de la matrice dans la direction radiale modifie la rigidité du composite tissé. En particulier, le module élastique du composite tissé dans la direction hors plan est plus faible (figure 4.7). Les essais réalisés sur CMC permettent d'estimer un module hors plan inférieur à 30 GPa, soit presque 10 fois plus faible que dans le plan du composite (direction longitudinale).

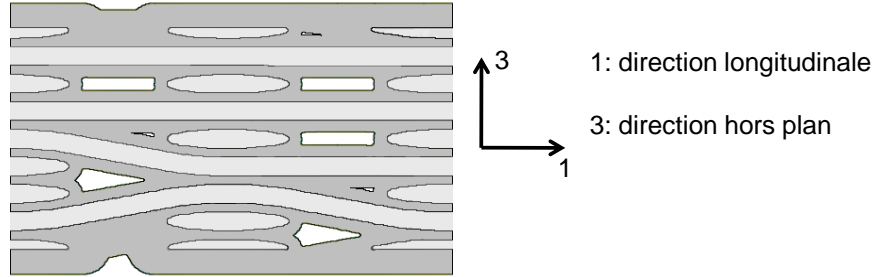


Figure 4.7 – Représentation du composite tissé.

A partir de la rigidité effective du composite tissé dans la direction transversale, il est possible d'identifier la valeur du module élastique de la matrice homogène équivalente dans la direction radiale, par méthode inverse.

Détermination du tenseur des rigidités

Les propriétés élastiques du fil sont déterminées par calculs EF à partir du volume élémentaire représentatif (figure 4.4). Le tenseur de rigidité (C) est ensuite calculé.

Comportement isotrope transverse

Après homogénéisation, le fil unidirectionnel est caractérisé par un **comportement isotrope transverse**. Cela correspond à un comportement orthotrope avec des propriétés élastiques identiques dans le plan perpendiculaire aux fibres (directions 2 et 3, figure 4.4).

Le tenseur élastique du matériau orthotrope et la relation entre le tenseur des contraintes (σ) et le tenseur des déformations (ε) s'écrivent

$$(\sigma) = (C)(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad (\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Pour le matériau isotrope transverse, les propriétés élastiques dans les directions 2 et 3 sont identiques. Les composants du tenseur des rigidités sont réduits à 5 constantes indépendantes C_{11} , C_{22} , C_{12} , C_{23} et C_{66} . Le tenseur des rigidités devient

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad \text{avec} \quad C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}). \quad (4.2)$$

Conditions aux limites périodiques

Le volume élémentaire représentatif (VER) du minicomposite représente un motif élémentaire périodique. Comme on l'a montré précédemment, le maillage est généré de façon à pouvoir assembler plusieurs volumes côte à côte (figure 4.3).

Cela implique qu'à chacun des nœuds de la face A peut être associé un unique nœud de la face B ayant les mêmes coordonnées dans la direction 1 et 3 (figure 4.8). La même association peut être réalisée pour tous les nœuds des faces C et D, ainsi que des faces E et F.

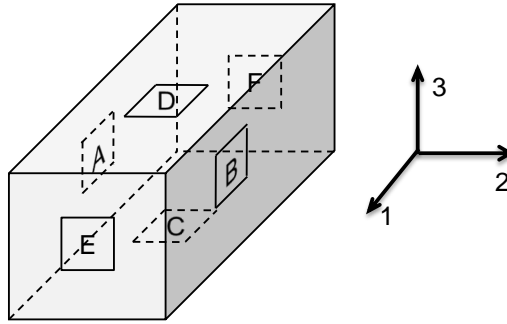


Figure 4.8 – Faces du volume pour imposer les conditions aux limites.

Des **conditions de périodicité** sur chaque nœud des faces du volume sont alors imposées. Par exemple, si le volume est sollicité en traction, en notant U_i^A le déplacement dans la direction i d'un nœud de la face A, le déplacement du nœud associé sur la face B est fixé par $U_1^B = U_1^A$ dans la direction 1, $U_2^B = -U_2^A$ dans la direction 2 et $U_3^B = U_3^A$ dans la direction 3.

Calcul des composants $C_{i,j}$

Pour déterminer les composants C_{ij} par EF, la déformation ε_{ij} est imposée sur les faces du VER et les contraintes σ_{ij} sont calculées.

Un choix de six cas de chargement est utilisé (tableau 4.1). Pour chaque cas, une seule composante du tenseur de déformation ε_{ij} , imposé sur les faces du VER, est non nulle.

Cas de chargement	Conditions aux limites imposées sur les faces du VER	composants C_{ij} de (C) calculé
1	$\varepsilon_{11} = 1$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall i, j \neq 1$	$(\sigma) = (C_{11} \ C_{12} \ C_{13} \ 0 \ 0 \ 0)$
2	$\varepsilon_{22} = 1$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall i, j \neq 2$	$(\sigma) = (C_{12} \ C_{22} \ C_{23} \ 0 \ 0 \ 0)$
3	$\varepsilon_{33} = 1$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall i, j \neq 3$	$(\sigma) = (C_{13} \ C_{23} \ C_{33} \ 0 \ 0 \ 0)$
4	$\varepsilon_{23} = 0,5$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall \{i \neq 2, j \neq 3\}$	$(\sigma) = (0 \ 0 \ 0 \ C_{44} \ 0 \ 0)$
5	$\varepsilon_{13} = 0,5$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall \{i \neq 1, j \neq 3\}$	$(\sigma) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ C_{55} \ 0)$
6	$\varepsilon_{12} = 0,5$ et $\varepsilon_{ij} = 0 \forall \{i \neq 1, j \neq 2\}$	$(\sigma) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ C_{66})$

Tableau 4.1 – Six cas de chargement en déformation appliqué et calcul des composants du tenseur des rigidités.

La moyenne de chaque composant σ_{ij} sur tout le volume est calculée par EF. On obtient le tenseur de contrainte moyen (σ) . Ainsi on peut déterminer les composants du tenseur des rigidités (C) à l'aide de la relation contraintes/déformations (4.1). Chaque cas de chargement permet d'estimer une ligne du tenseur (C) (tableau 4.1).

On en déduit ensuite la matrice des souplesses $(S) = (C)^{-1}$ et les constantes d'élasticité.

I.4 Evolution des propriétés élastiques du minicomposite

Constantes d'élasticité

Pour le matériau isotrope transverse, le tenseur des rigidités (C) est réduit à 5 composantes indépendantes. Les constantes d'élasticité peuvent être déduites de la matrice des souplesses (S) = (C)⁻¹ qui s'exprime par

$$(S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_t}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & -\frac{\nu_t}{E_t} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_t)}{E_t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{pmatrix}_{(1,2,3)} \quad (4.3)$$

Pour simplifier on utilise les indices l et t . A l'échelle du fil, la direction longitudinale (1) est notée l . Les deux directions transversales (2 et 3) sont notées t .

Les cinq constantes d'élasticité sont :

- le module longitudinal E_l ,
- le module transversal E_t ,
- le module de cisaillement longitudinal G_{lt} ,
- les coefficients de Poisson respectivement longitudinal et transversal ν_{lt} et ν_t .

Le module de cisaillement transversal G_t s'écrit $G_t = \frac{E_t}{2(1+\nu_t)}$.

Le module élastique E_l dans la direction longitudinale a déjà été déterminé en étudiant la cellule élémentaire axisymétrique représentant la fibre et la gaine de matrice (chapitre 2, équation 1.33, page 48). Ces calculs 3D sont destinés à la détermination des quatre autres propriétés.

Minicomposite sain

D'une part, les constantes d'élasticité E_l , E_t , G_{lt} , ν_{lt} , ν_t et G_t sont calculées numériquement en mettant en œuvre la démarche précédente.

D'autre part, en considérant le fil sain (sans fissure), ces constantes d'élasticité peuvent être obtenues par le biais de relations analytiques. Ces relations dépendent des caractéristiques mécaniques des fibres et de la matrice, avec un comportement élastique isotrope.

Les comparaisons effectuées entre les deux méthodes, pour le fil sain, ont donné des valeurs identiques des constantes d'élasticité.

Les expressions théoriques des constantes d'élasticité, pour le minicomposite ou le fil sain, sans porosité, sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_l = V_f E_f + (1 - V_f) E_m \\ E_t = \frac{2}{\frac{1}{2K_l} + \frac{1}{2G_t} + 2\frac{\nu_{lt}^2}{E_l}} \\ G_{lt} = G_m \frac{G_f(1 + V_f) + G_m(1 - V_f)}{G_f(1 - V_f) + G_m(1 + V_f)} \\ \nu_{lt} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_t = \frac{E_t}{2G_t} - 1 \\ G_t = G_m \left[1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + (1 - V_f) \frac{k_m + \frac{7G_m}{3}}{2k_m + \frac{8G_m}{3}}} \right] \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où le module de compression latérale

$$K_l = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{G_f - G_m}{3}} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4G_m}{3}}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_f = \frac{E_f}{3(1 - 2\nu_f)} \\ k_m = \frac{E_m}{3(1 - 2\nu_m)} \\ K_m = k_m + \frac{G_m}{3} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Le module élastique et le coefficient de Poisson des fibres sont notées E_f et ν_f et celles de la matrice E_m et ν_m . V_f est la fraction volumique de fibres dans le volume. Les modules de cisaillement G_f et G_m s'expriment par

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} \quad \text{et} \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}. \quad (4.6)$$

Dans toute la suite on note les constantes élastiques du fil sain avec l'indice "0" pour les différencier de celles du fil endommagé.

Evolution en fonction de l'endommagement

Les propriétés élastiques du fil fissuré dépendent de la densité de fissures matricielles ρ et de la longueur de décohesion d . La matrice de souplesse du fil endommagé est

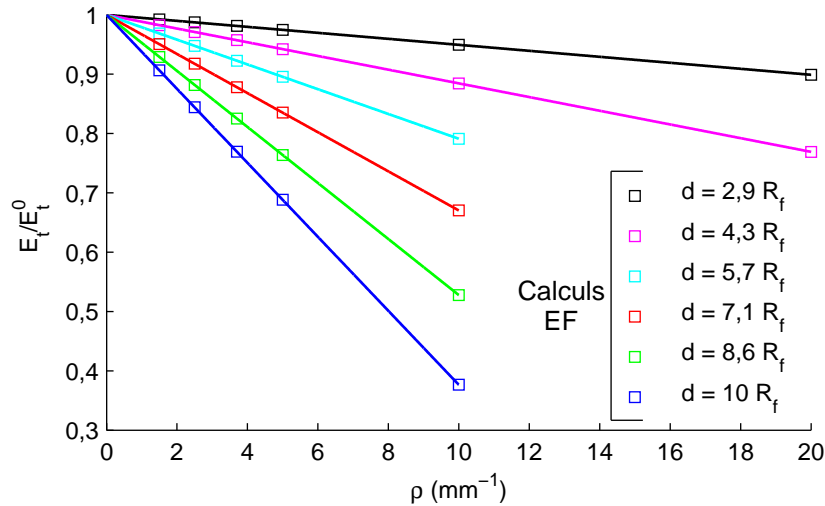
$$(S(\rho, d)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_l(\rho, d)} & -\frac{\nu_{lt}(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & -\frac{\nu_{lt}(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{lt}(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & \frac{1}{E_t(\rho, d)} & -\frac{\nu_t(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & -\frac{\nu_t(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & \frac{1}{E_t(\rho, d)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & -\frac{\nu_t(\rho, d)}{E_t(\rho, d)} & \frac{1}{E_t(\rho, d)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_t(\rho, d))}{E_t(\rho, d)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}(\rho, d)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}(\rho, d)} \end{pmatrix} \quad (1,2,3) \quad (4.7)$$

L'évolution des modules élastiques $E_t(\rho, d)$ et $G_{lt}(\rho, d)$ ainsi que des coefficients de Poisson $\nu_{lt}(\rho, d)$ et $\nu_t(\rho, d)$ en fonction de l'endommagement sont déterminés à l'aide des calculs EF (figures 4.9 et 4.10). Le module longitudinal $E_l(\rho, d)$ a déjà été étudié précédemment.

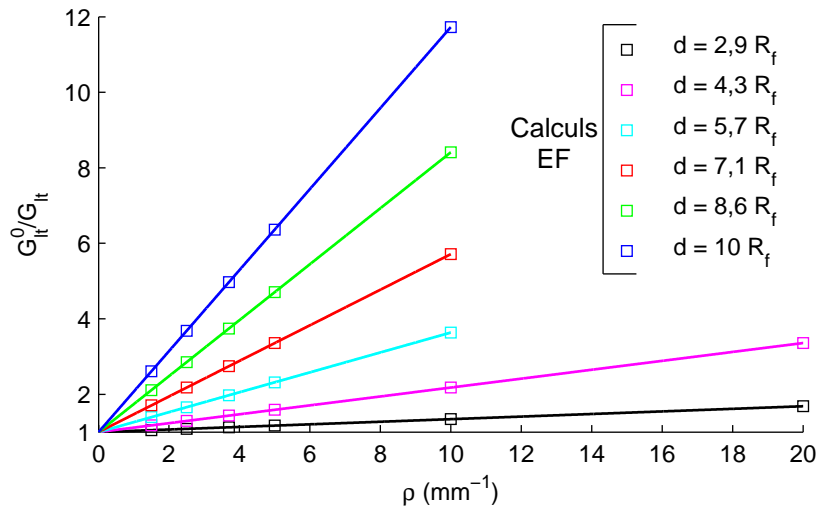
La méthode décrite précédemment est mise en œuvre. Les calculs sont réalisés en prenant en compte plusieurs valeurs de la densité de fissuration et de la longueur de décohésion lors de la génération du maillage EF :

- la densité de fissuration ρ est paramétrée par la longueur L du volume représentatif du fil endommagé. On a choisi $\rho = \{1,5 ; 2,5 ; 3,7 ; 5 ; 10 ; 20\} \text{ mm}^{-1}$ ce qui correspond à un pas de fissuration $L = \{667 ; 400 ; 270 ; 200 ; 100 ; 50\} \mu\text{m}$.
- les longueurs de décohésion étudiées sont $d = \{20 ; 30 ; 40 ; 50 ; 60 ; 70\} \mu\text{m}$, dans la mesure où d est inférieure à la longueur L du volume.

Le volume élémentaire étudié est composé de 15 fibres de rayon $R_f = 7 \mu\text{m}$, avec une fraction volumique de fibre $V_f = 52 \%$ et un taux de porosité $V_p = 22 \%$.



(a) Module transversal $E_t(\rho, d)$ en fonction de ρ



(b) Inverse du module de cisaillement longitudinal $G_{lt}(\rho, d)$ en fonction de ρ

Figure 4.9 – Evolution des modules élastiques $E_t(\rho, d)$ (a) et $G_{lt}(\rho, d)$ (b) en fonction de la densité de fissuration matricielle ρ et de la longueur de décohésion d , obtenue à partir des calculs EF.

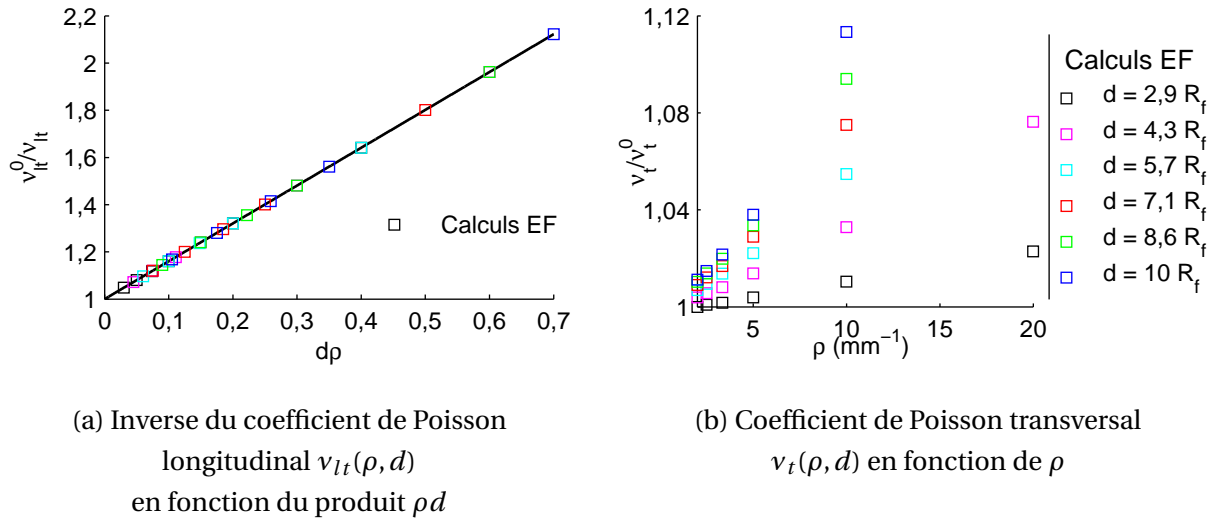


Figure 4.10 – Evolution des coefficients de Poisson $v_{lt}(\rho, d)$ (a) et $v_t(\rho, d)$ (b) en fonction de la densité de fissuration matricielle ρ et pour plusieurs valeurs de la longueur de décohésion d , obtenue à partir des calculs EF.

Les valeurs des constantes élastiques obtenues à partir des calculs EF permettent d'évaluer leur évolution avec l'endommagement :

- le module transversal $E(\rho, d)$ est linéaire avec la densité de fissuration ρ (figure 4.9a),
- l'inverse du module de cisaillement longitudinal $G_{lt}(\rho, d)$ est aussi linéaire en fonction de la densité de fissuration ρ (figure 4.9b),
- l'inverse du coefficient de Poisson longitudinal $v_{lt}(\rho, d)$ évolue linéairement conformément au produit de la densité de fissures matricielles par la longueur de décohésion ρd (figure 4.10a),
- le coefficient de Poisson transversal $v_t(\rho, d)$ ne varie pas de manière significative avec l'endommagement (figure 4.10b).

On souhaite identifier des lois d'évolution des caractéristiques élastiques à l'aide de fonctions dépendantes des deux variables d'endommagement ρ et d . On propose alors les lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_t(\rho, d) = E_t^0 \left(1 - K_{Et}(d) \frac{\rho}{\rho_0} \right) & \text{avec } K_{Et}(d) = \sum_{i=0}^{i=5} K_{Et,i} \left(\frac{d}{d_0} \right)^i \quad (a) \\ G_{lt}(\rho, d) = \frac{G_{lt}^0}{1 + K_{Glt}(d) \frac{\rho}{\rho_0}} & \text{avec } K_{Glt}(d) = \sum_{i=0}^{i=2} K_{Glt,i} \left(\frac{d}{d_0} \right)^i \quad (b) \\ v_{lt}(\rho, d) = \frac{v_{lt}^0}{1 + K_{vlt} \rho d} & \text{avec } K_{vlt} \text{ indépendant de } d \quad (c) \\ v_t(\rho, d) = v_t^0 & \quad (d) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

où E_t^0 , G_{lt}^0 , v_{lt}^0 et v_t^0 sont les propriétés élastiques du fil non endommagé. Les valeurs de ρ_0 et de d_0 sont égales à $\rho_0 = 1 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$ et $d_0 = 1 \text{ } \mu\text{m}$.

Les coefficients $K_{Et,i}$ avec $i \in \{0; \dots; 5\}$, $K_{Glt,i}$ avec $i \in \{0; 1; 2\}$ et K_{nult} sont à identifier. Ils dépendent des caractéristiques de la fibre et de la matrice à l'intérieur du fil.

Pour approcher correctement le module transversal et le module de cisaillement longitudinal, il est nécessaire que les fonctions $K_{Et}(d)$ et $K_{Glt}(d)$ soient des polynômes respectivement de degré cinq pour le module transversal et deux pour le module de cisaillement longitudinal.

Etant donné que le coefficient de Poisson transversal ν_t ne varie que très peu avec l'endommagement, on suppose qu'il est constant et que $\nu_t(\rho, d) = \nu_t^0$.

Au total, les lois d'évolution 4.8 requièrent l'identification de dix coefficients et la détermination des propriétés élastiques du fil sain. Pour les caractéristiques du fil étudié au cours de ce paragraphe, ces valeurs sont données dans le [tableau 4.2](#).

Propriétés élastiques du fil sain :	Coefficients pour le module E_t :	Coefficients pour le module G_{lt} :
$E_t^0 = 150 \text{ GPa}$	$K_{Et,0} = -0,1$	$K_{Glt,0} = 53$
$G_{lt}^0 = 75 \text{ GPa}$	$K_{Et,1} = 0,01$	$K_{Glt,1} = -7,1$
$\nu_{lt}^0 = 0,157$	$K_{Et,2} = 0,012$	$K_{Glt,2} = 0,3$
$\nu_t^0 = 0,13$	$K_{Et,3} = -3,2 \cdot 10^{-5}$	Coefficient ν_{lt} :
	$K_{Et,4} = 1,9 \cdot 10^{-6}$	$K_{nult} = 1,6$
	$K_{Et,5} = -2 \cdot 10^{-8}$	

Tableau 4.2 – Caractéristiques élastiques du fil sain et valeurs des coefficients identifiés pour l'équation 4.8.

Les lois d'évolutions des propriétés élastiques $E_t(\rho, d)$, $G_{lt}(\rho, d)$, $\nu_{lt}(\rho, d)$ et $\nu_t(\rho, d)$ (4.8) et les coefficients identifiés ([tableau 4.2](#)) permettent de retrouver les mêmes valeurs que celles obtenues par les calculs EF. Les valeurs des propriétés élastiques déterminées à partir des expressions sont tracées en trait continu sur les figures 4.9 et 4.10a.

On rappelle que le module de cisaillement transversal $G_t(\rho, d)$ peut se calculer à partir du module transversal $E_t(\rho, d)$, linéaire en fonction de ρ , ainsi que du coefficient de Poisson transversal ν_t supposé constant. L'évolution de $G_t(\rho, d)$ obtenue est illustrée [figure 4.11](#).

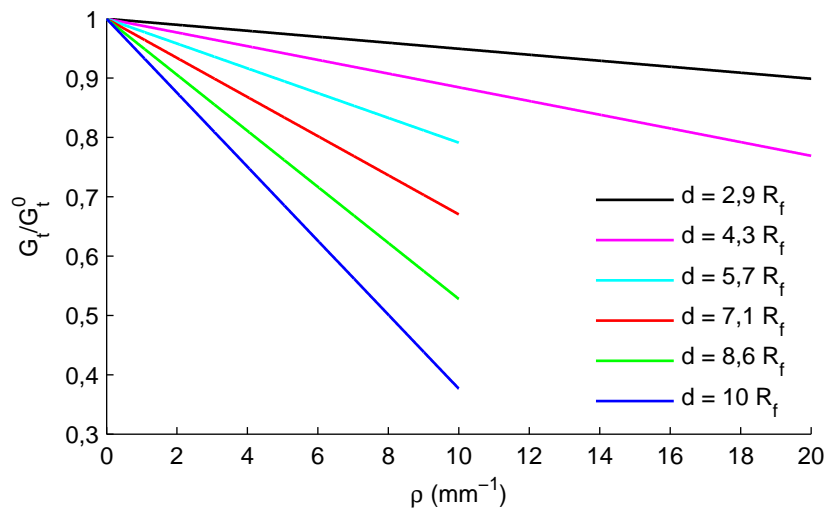


Figure 4.11 – Module de cisaillement transversal $G_t(\rho, d)$ en fonction de la densité de fissuration ρ et pour plusieurs valeurs de la longueur de décohésion d .

I.5 Procédure automatique pour le calcul des propriétés élastiques

Les étapes de l'approche du calcul détaillées précédemment ont été programmées pour former un outil automatique. La procédure automatisée, programmée avec le code Matlab, a été implémentée pour déterminer les lois d'évolution des propriétés élastiques et les valeurs des coefficients associés.

Les données d'entrée de l'outil automatique sont :

- la cellule 2D générée en fonction des caractéristiques du fil étudié : fraction volumique de fibres V_f , taux de porosité V_p , nombre de fibres, répartition des fibres,
- les valeurs de la densité de fissures matricielles ρ et de la longueur de décohésion d à étudier,
- les propriétés élastiques des fibres et de la matrice constituant le fil ou le minicomposite.

L'outil automatique réalise successivement les opérations suivantes :

1. Pour chaque valeur des deux variables (ρ, d) , le programme effectue :
 - (a) l'extrusion de la cellule 2D sur la longueur $L = 1/\rho$ pour générer le maillage 3D,
 - (b) l'insertion de la fissure matricielle en son centre et de la décohésion interfaciale sur la longueur d ,
 - (c) le calcul EF de la matrice des rigidités $(C(\rho, d))$ du fil endommagé.
2. Calcul des propriétés élastiques $E_t(\rho, d)$, $G_t(\rho, d)$, $\nu_{lt}(\rho, d)$ et $\nu_t(\rho, d)$,
3. Identification des dix coefficients $K_{Et,i}$ avec $i \in \{0 ; .. ; 5\}$, $K_{Glt,i}$ avec $i \in \{0 ; 1 ; 2\}$ et K_{nult} pour écrire les lois d'évolution des propriétés élastiques de l'équation 4.8.

Ce programme automatique utilise les fonctions de maillage, d'insertion de fissures et d'homogénéisation développées par [Couégnat, 2008] à l'aide du code Matlab. Une interface graphique a été créée pour renseigner les données d'entrée. Les tenseurs de rigidités, les propriétés élastiques et les coefficients identifiés sont enregistrés dans les fichiers de sortie.

On obtient l'évolution des propriétés élastiques en fonction des deux variables d'endommagement (ρ, d) à l'aide des expressions proposées, à partir des caractéristiques des constituants élémentaires du fil ou du minicomposite. Le tenseur des souplesses $(S(\rho, d))$ du fil contenant les fissures est calculé d'après l'équation 4.7. Le tenseur des rigidités s'obtient par $(C(\rho, d)) = (S(\rho, d))^{-1}$.

La loi de comportement endommageable du fil, proposée dans ce chapitre, est ensuite développée à partir de la connaissance à la fois de $(C(\rho, d))$ ainsi que de l'évolution de $\rho(\epsilon_{11})$ et de $d(\epsilon_{11})$, en notant la déformation axiale ϵ_{11} .

I.6 Ecriture explicite de la loi de comportement du fil

A ce stade, nous disposons des propriétés élastiques du fil endommagé et de l'évolution des deux variables d'endommagement avec la déformation axiale :

- On considère le fil endommagé contenant les fissures matricielles avec une densité ρ et la décohésion interfaciale d . Le **tenseur élastique** ($C(\rho, d)$) est calculé à partir des propriétés élastiques $E_t(\rho, d)$, $G_t(\rho, d)$, $\nu_{lt}(\rho, d)$ et $\nu_t(\rho, d)$ déterminées au cours de ce chapitre. Le module longitudinal $E_l(\rho, d)$ a été exprimé au chapitre 2 (Eq. 1.33 p. 48).
- On souhaite prendre en compte la **déformation axiale résiduelle** résultant des contraintes résiduelles ainsi que du frottement. Ces déformations résiduelles ont aussi été étudiées et exprimées chapitre 2 (Eq. 1.39 p. 50), à partir des propriétés mécaniques des fibres et de la matrice ainsi que du coefficient de frottement.
- L'évolution des deux variables d'endommagement $\rho(\varepsilon_{11})$ et de $d(\varepsilon_{11})$ a été modélisée au cours de la traction uniaxiale. Le développement de la décohésion dépend de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et du coefficient de frottement. La fissuration de la matrice est gouvernée, en plus, par la loi statistique de Weibull et ses deux paramètres σ_{max} et m (chapitre 3).

Opérations effectuées au cours d'un incrément de calcul

On s'intéresse maintenant au fil ou au minicomposite représenté dans le maillage EF par des éléments ayant un comportement homogénéisé équivalent (par exemple, les fils homogénéisés au sein du composite tissé (figure 4.1)).

On propose de programmer la loi de comportement dans le code de calcul EF à partir des éléments énoncés précédemment. La loi de comportement est écrite de manière explicite. La figure 4.12 liste les calculs effectués au cours d'une itération de calcul et pour un élément de maillage :

1. A chaque incrément, on considère le tenseur de déformation (ε) de l'élément examiné. On souhaite utiliser en particulier la déformation ε_{11} dans la direction longitudinale (direction de l'axe des fibres).
2. La densité de fissuration matricielle $\rho(\varepsilon_{11})$ et la longueur de décohésion $d(\varepsilon_{11})$ de l'élément considéré sont directement calculés à partir de la déformation axiale $\varepsilon_{11}(t)$. Les expressions développées dans les deux chapitres précédents pour la modélisation de la fissuration en traction sont utilisées (2.34 et 2.35 p. 107, 3.21 p.139).

L'endommagement est irréversible. Cela se traduit par le fait que les deux variables d'endommagement ρ et d sont au moins égales aux valeurs obtenues au cours de l'incrément de calcul précédent.

3. On décompose la déformation ε_{11} sous forme de la somme de la déformation élastique, notée ε_{11}^e , et de la déformation inélastique. La déformation inélastique correspond aux **déformations résiduelles apparentes** définies précédemment lors de la modélisation du comportement en traction (Eq. 2.33 et figure 2.25b, p 106).

On note le tenseur de déformation élastique (ε^e) obtenu à partir de la déformation "élastique" ε_{11}^e dans la direction longitudinale.

4. Le tenseur des rigidités ($C(\rho, d)$) est ensuite déterminé en utilisant les lois d'évolution des propriétés élastiques identifiées précédemment (4.8) ainsi que du module longitudinal.

5. Enfin le tenseur des contraintes ($\sigma(t)$), à l'incrément t , est obtenu à partir de $C(\rho, d)$ et du tenseur des déformations élastiques (ε^e).

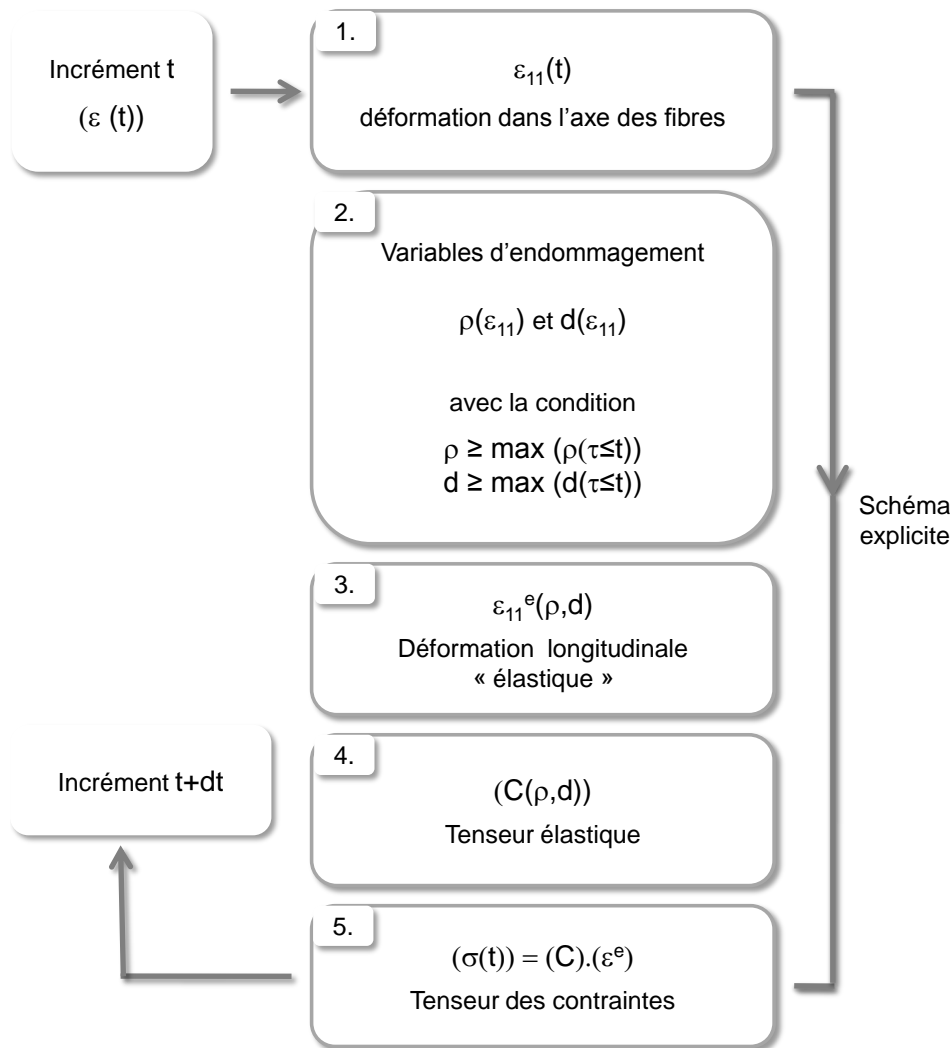


Figure 4.12 – Implémentation de la loi de comportement proposée dans le code de calcul EF, par un schéma explicite. Calculs effectués au cours d'une itération de calcul et pour un élément de maillage. (ε) est le tenseur des déformations.

Le comportement en traction cyclée, obtenu en utilisant cette loi de comportement, tient compte de l'évolution de l'endommagement et des déformations résiduelles apparentes lors des déchargements (figure 4.13). Ces déformations résiduelles sont calculées au cours des étapes de calcul, en décomposant la déformation axiale ε_{11} . Bien sûr les boucles d'hystérésis ne peuvent pas être modélisées. Le comportement au cours des cycles est linéaire.

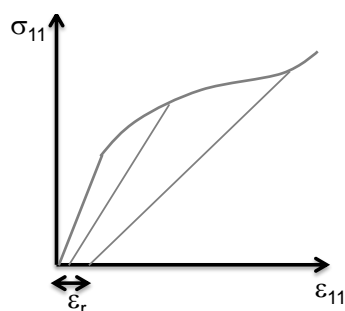


Figure 4.13 – Comportement en traction obtenu par la loi de comportement proposée.

Implémentation dans le code de calcul EF

La loi de comportement proposée a été écrite dans le code de calcul EF Zébulon. Le résultat obtenu est d'abord examiné en utilisant un seul élément de volume lors du calcul EF. La figure 4.14 représente la réponse en traction cyclé de l'élément de volume qui a été simulé par le code Zébulon (courbe bleue).

Les paramètres utilisés pour le calcul du tenseur des rigidités sont ceux du tableau 4.2 p. 154. Les deux variables d'endommagement sont déterminées d'après les propriétés identifiées par comparaison avec les essais de traction sur minicomposite (tableau 3.3, p.137).

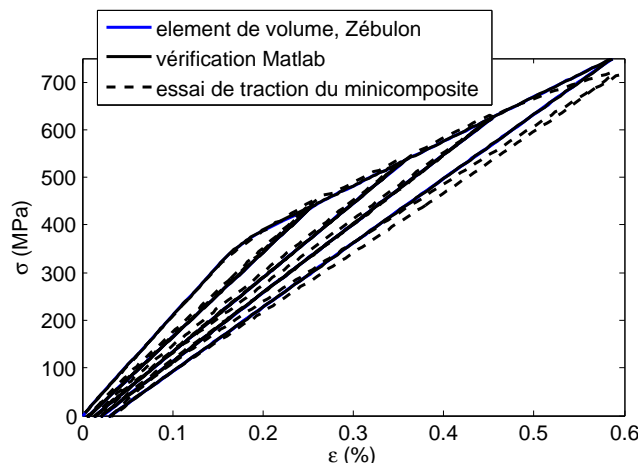


Figure 4.14 – Réponse en traction obtenue avec la loi de comportement sur un élément de volume avec le code Zébulon. Comparaison avec la réponse simulée par la programmation avec le code Matlab.

Cette courbe est comparée à la courbe de comportement en traction obtenue en programmant la loi endommageable et les itérations du calcul EF avec Matlab (courbe noire). L'objectif était de vérifier que le code source de la loi endommageable dans Zébulon a été écrit sans erreur (interprétation correcte de l'écriture du tenseur des contraintes, des déformations et du tenseur des rigidités).

Enfin la courbe en traits pointillés représente la courbe de traction expérimentale à partir de laquelle les cinétiques d'endommagement ont été identifiées. On observe une perte de rigidité plus forte en fin de chargement juste avant la rupture du composite qui n'apparaît pas sur les courbes simulées. Ceci résulte du fait que l'endommagement induit par les ruptures de fibres n'a pas été pris en compte.

I.7 Bilan

Cette loi de comportement a été développée sous plusieurs hypothèses :

- seul l'endommagement résultant des sollicitations dans la direction longitudinale est pris en compte,
- de plus, seules les déformations résiduelles apparentes dans la direction longitudinale sont considérées.

La force de cette loi de comportement est qu'elle est fondée uniquement sur la connaissance des propriétés des constituants élémentaires (fibres, matrice, interface) et des propriétés gouvernant l'évolution de l'endommagement.

Dans la perspective d'enrichir cette loi, plusieurs éléments pourraient être ajoutés, comme par exemple l'évolution de la décohésion sous chargement dans les directions transversales (directions 2 et 3). Il serait aussi utile de programmer le calcul des ouvertures de fissures matricielles au sein des éléments de maillage à chaque temps de calcul. Enfin, la rupture du fil résulte de la rupture successive des fibres au sein du fil ou du minicomposite.

II Rupture du minicomposite ou du fil en traction

On suppose que la rupture des fibres, dans le minicomposite ou le fil en traction, intervient après la fissuration matricielle et la décohésion interfaciale. On souhaite modéliser la rupture successive des fibres en traction.

Pour cela, on considère le volume élémentaire représentatif du fil ou du minicomposite contenant les fissures matricielles et la décohésion. On propose d'analyser la rupture des fibres lors de calculs EF, en utilisant un modèle de zones cohésives (MZC). Les zones cohésives sont insérées dans les fibres. Elles sont placées à l'endroit des potentielles fissures.

La rupture de la fibre dans la zone cohésive est paramétrée par un critère en contrainte. Une loi statistique de Weibull est utilisée pour la distribution de ces contraintes dans chaque zone de rupture des fibres.

L'objectif est de calculer la contrainte à rupture du volume élémentaire en traction. Plusieurs tirages aléatoires des contraintes à rupture des fibres sont réalisés. Les paramètres de la loi statistique ainsi que les caractéristiques du minicomposite, les dimensions du volume élémentaire, l'état d'endommagement matricielle et la décohésion sont étudiés. L'intérêt est de fournir un critère de rupture du fil ou du minicomposite en traction.

II.1 Modèle de zones cohésives et approche statistique de la rupture

Volume élémentaire

Le volume élémentaire représentatif (VER) du fil ou du minicomposite en traction dépend des caractéristiques du fil et de l'état d'endommagement :

- fraction volumique de fibres V_f et taux de porosité,
- nombre de fibres N_f dans le volume et répartition des fibres,
- pas de fissuration matricielle L ,
- longueur de décohésion d .

La génération et le maillage du VER (figure 4.4) sont réalisés par les outils et les procédures déjà présentés (p. 144 - 146). Chacune des fibres du maillage est identifiée séparément.

Modèle de zones cohésives

Zones de rupture potentielles et maillons

Les zones de rupture potentielles des fibres sont ensuite choisies. Elles sont modélisées par l'insertion de zones cohésives dans les fibres du maillage EF (figure 4.15). L'interface entre les fibres et la matrice peut présenter une décohésion ou non.

Les zones cohésives sont insérées au sein de maillons qui constituent les volumes de fibre présentant les défauts. On utilise une longueur de maillon fixe. La taille des éléments du maillage est choisie au préalable pour pouvoir insérer les zones cohésives entre deux éléments.

Outils de maillage pour l'insertion des zones cohésives

Les outils de maillage permettant d'insérer les zones cohésives avaient déjà été développés pour l'étude 2D de la fissuration matricielle et de la décohésion (chapitre 2 et 3). Ils ont été adaptés pour les maillages 3D composés d'éléments tétraédriques. Les éléments cohésifs sont alors constitués de six nœuds. Un traitement spécifique a été réalisé pour les zones cohésives insérées dans les fibres qui sont en cohésion avec la matrice.

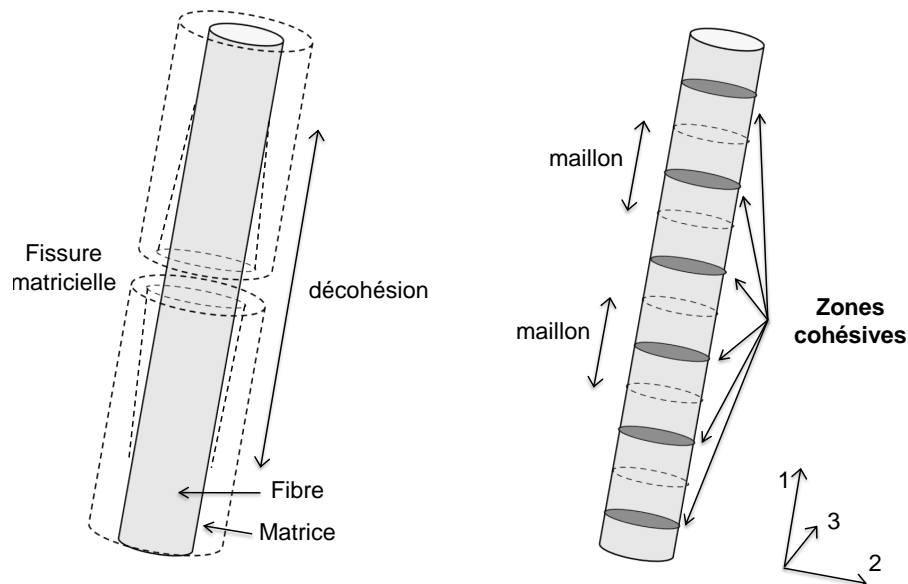


Figure 4.15 – Insertion des zones cohésives dans les fibres.

Les zones cohésives sont insérées dans des plans perpendiculaires à l'axe des fibres.

Loi de comportement de la zone cohésive

La rupture est modélisée par la loi de comportement qui régit les zones cohésives. On considère la rupture intervenant lors de sollicitations en traction. La loi de comportement définit alors la relation entre l'effort normal et l'ouverture de la fissure (différence de déplacement normal).

On choisit d'utiliser la loi cohésive déjà développée pour modéliser l'amorçage de la fissure matricielle en traction (chapitre 2, p. 40). Cette loi est fondée sur le modèle de [Alfano et Crisfield, 2001]. L'amorçage de la fissure intervient dès que la contrainte normale dans la fibre atteint la **contrainte maximale** σ_{max} .

La contrainte σ_{max} pilote l'amorçage de la fissure. Une fois amorcée, la propagation de la fissure dans la zone cohésive dépend de l'énergie de rupture. On choisit une **énergie de rupture suffisamment faible** pour obtenir la propagation de la fissure dans toute la zone cohésive dès son amorçage. En reprenant la définition de cette loi p. 40, l'énergie de rupture est faible si le paramètre de déplacement relatif δ_n est également faible.

Ainsi la rupture de la fibre est gouvernée par la contrainte σ_{max} .

Loi statistique de la rupture

Les zones de rupture potentielle des fibres sont localisées dans chaque plan de rupture de chaque fibres. La contrainte σ_{max} doit être attribuée à chacune de ces zones cohésives. **Un modèle statistique est utilisé pour le calcul des contraintes σ_{max} .**

On choisit la loi statistique de Weibull pour déterminer la distribution des σ_{max} . Les deux paramètres de Weibull sont

- la contrainte seuil, notée $\sigma_{0,f}$,
- le module, noté m_f .

On considère la rupture d'un élément de volume de fibre $V_{maillon}$. Ce volume dépend de la longueur du maillon $L_{maillon}$ et des caractéristiques des fibres. La probabilité de rupture de cet élément de volume s'exprime par

$$P = 1 - \exp\left(-\frac{V_{maillon}}{V_0} \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{0,f}}\right)^{m_f}\right) \quad \text{avec} \quad V_{maillon} = \pi R_f^2 L_{maillon}, \quad (4.9)$$

où le volume V_0 est fixé à 1 m^3 .

On déduit de cette loi statistique la valeur de la contrainte maximale σ_{max} par

$$\sigma_{max} = \sigma_{0,f} \left[-\log(1 - P) \frac{V_0}{V_{maillon}} \right] \quad \text{où} \quad P \in [0; 1]. \quad (4.10)$$

La probabilité de rupture P est considérée comme une variable aléatoire uniforme dont la valeur est comprise entre 0 et 1.

La distribution des contraintes σ_{max} attribuées aux zones cohésives dépend des paramètres de Weibull, des caractéristiques des fibres et de la longueur des maillons. Cette **distribution aléatoire des σ_{max} permet la rupture successive des fibres** au niveau de chaque zone cohésive.

II.2 Rupture successive des fibres

Les maillages avec les zones cohésives insérées sont utilisés pour simuler un chargement de traction par analyse EF.

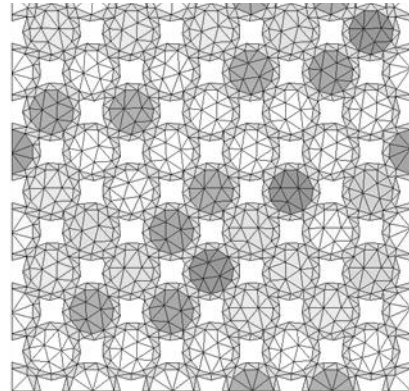
Caractéristiques du fil étudié

Les caractéristiques du fil et du VER utilisés sont donnés dans le [tableau 4.3](#).

Cellule 2D contenant 50 fibres :
fraction volumique de fibres $V_f = 0,5$
taux de porosité $V_p = 0,12$

Volume élémentaire (VER) :
longueur $L = 60 \mu m$
une fissure matricielle au centre
longueur de décohesion $d = 30 \mu m$
longueur des maillons $L_{maillon} = 10 \mu m$

(a) Caractéristiques du VER



(b) Maillage de la cellule 2D

Tableau 4.3 – Caractéristiques du volume élémentaire du fil ou du minicomposite étudié.

Les paramètres de Weibull utilisés au cours de cette étude sont

$$\sigma_{f,0} = 0,12 \text{ MPa et } m_f = 4.$$

Evolution du nombre de fibres rompues

La figure 4.16 illustre la rupture successive de chacune des fibres au cours de la traction simulée par EF. Une déformation axiale croissante, notée ε , est imposée. L'échelle de couleur représente le niveau de chargement.

La première fibre est rompue lorsque la contrainte axiale subie par la fibre atteint la contrainte maximale de la zone cohésive σ_{max} . Les contraintes sont alors déchargées dans le voisinage de la fibre cassée. Les fibres voisines supportent un effort plus élevé. La contrainte axiale de ces fibres est plus forte et peut atteindre la valeur de σ_{max} ce qui provoque de nouvelles ruptures. Le rechargement de contrainte au voisinage d'une fibre rompue a été analysé par [Rousset, 2008].

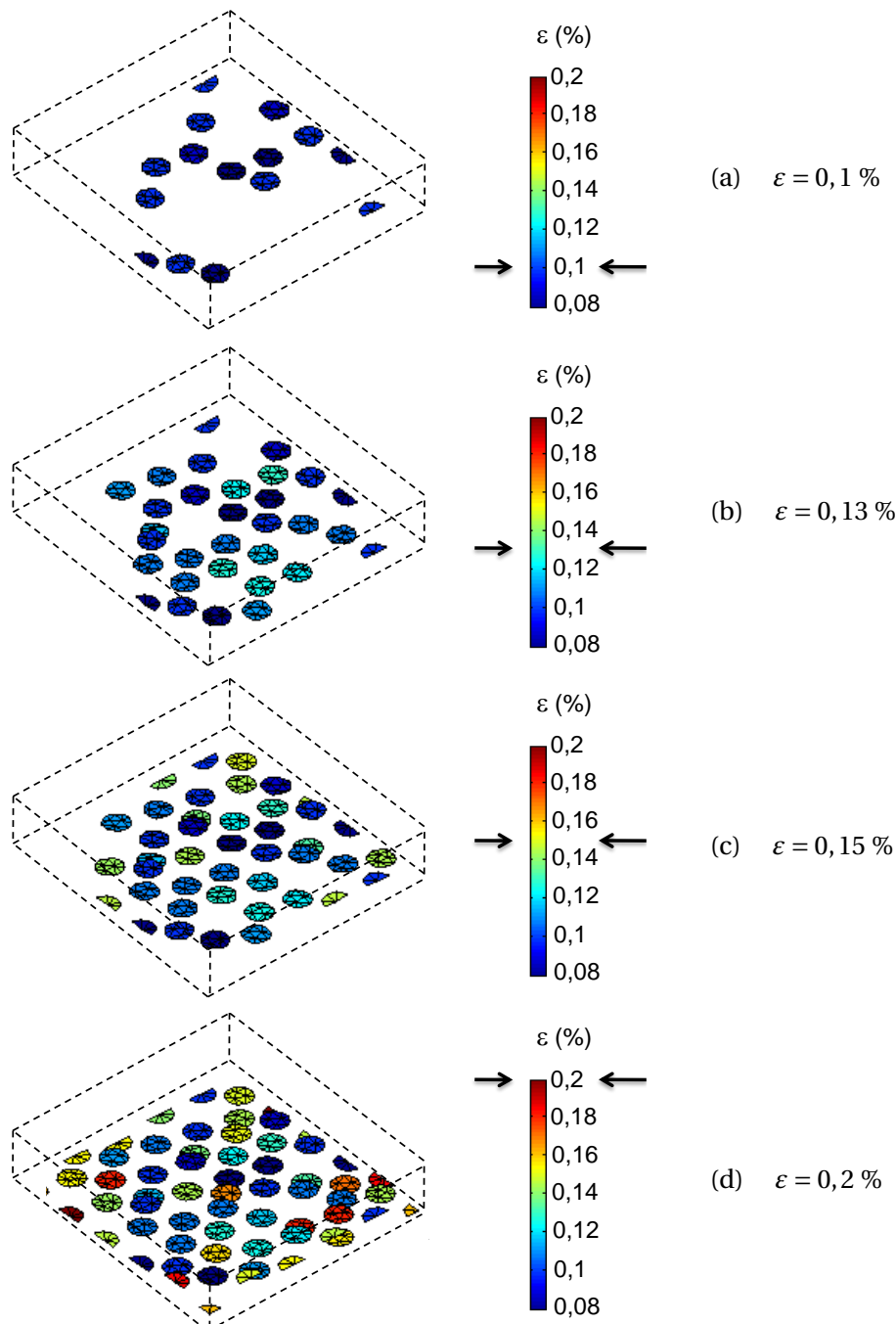


Figure 4.16 – Evolution de la rupture des fibres dans le volume contenant 50 fibres organisées périodiquement. Le chargement en déformation ε est imposé.

Les ruptures de fibres se sont toutes créées dans les zones des fibres présentant une décohésion à l'interface fibre/matrice. La contrainte axiale supportée par les fibres y est plus importante étant donné que la matrice est déchargée dans cette zone.

Le nombre de fibres rompues peut être représenté en fonction de la déformation axiale imposée ε (figure 4.17a). On comptabilise qu'une fibre est rompue dès qu'une zone cohésive dans un de ses plans d'insertion présente une fissure. On observe un ralentissement du nombre de fibres rompues avant la rupture de la dernière fibre.

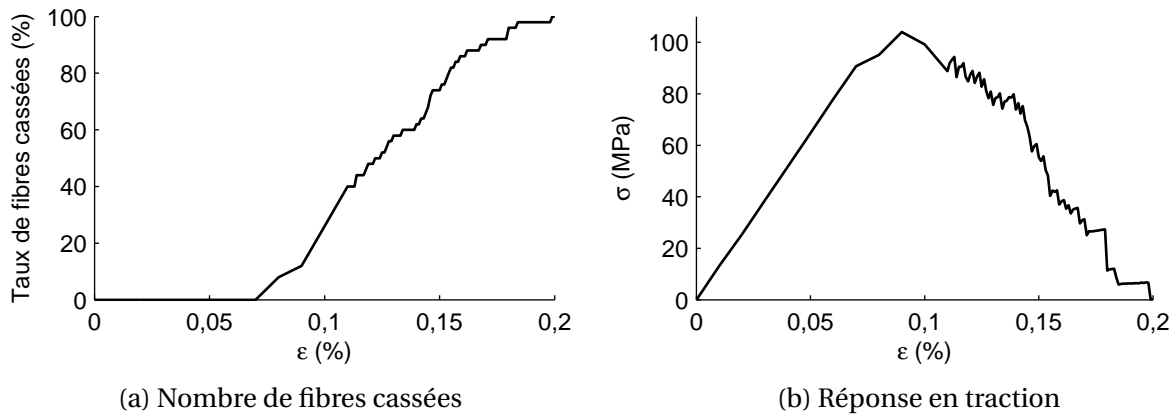


Figure 4.17 – (a) Pourcentage de fibres cassées en fonction du chargement de traction en déformation ε imposé. (b) Courbe contrainte/déformation obtenue.

Concernant le comportement en traction, la première rupture de fibre marque la fin de la linéarité (figure 4.17b). Les ruptures de fibre s'accompagnent de pertes de rigidité, ce qui peut engendrer les chutes de contrainte.

Lors d'un chargement en contrainte imposée, on observe les résultats suivants :

- la courbe contrainte/déformation ne présente plus de chute de contraintes mais des accroissements de déformation,
- après quelques ruptures de fibres, toutes les fibres restantes sont brutalement rompues au delà d'une contrainte seuil. Cette contrainte seuil correspond à la contrainte la plus élevée atteinte sur la courbe de traction en déformation imposée (figure 4.17b). Cette contrainte est la **contrainte à rupture du volume élémentaire**.

La contrainte à rupture ainsi déterminée dépend des paramètres suivants :

- les caractéristiques du minicomposite ou du fil,
- les paramètres de Weibull $\sigma_{0,f}$ et m_f et de la longueur des maillons,
- la distribution aléatoire des contraintes σ_{max} qui en résulte,
- la répartition des fibres dans le VER,
- le nombre de fibres,
- l'état d'endommagement matriciel et de la longueur de décohésion.

On note que les valeurs des paramètres de Weibull $\sigma_{f,0}$ et m_f , utilisés pour les études présentées dans ce chapitre, ont été choisies arbitrairement. Cela explique les **faibles valeurs des contraintes et déformations à rupture**.

II.3 Contrainte à rupture du volume élémentaire

Distribution des contraintes à rupture du VER

La contrainte à rupture du VER est obtenue par calcul EF en simulant la rupture des fibres en traction.

La contrainte à rupture du VER ainsi obtenue dépend des valeurs des contraintes σ_{max} attribuées à chacune des zones cohésives. Une distribution des valeurs des σ_{max} , obtenue aléatoirement d'après la loi statistique de Weibull, permet de calculer une valeur de la contrainte à rupture du VER.

Le calcul de la contrainte à rupture du VER est réalisé plusieurs fois en attribuant à chaque calcul des nouvelles valeurs des σ_{max} par tirages aléatoires. Les contraintes à rupture du VER calculées sont notées σ_R . La réitération de ces calculs nous donne alors une **distribution des contraintes à rupture σ_R du VER**. Un nombre de 120 calculs de σ_R est réalisé pour parvenir à cette distribution.

Probabilité de rupture

Cette distribution des contraintes à rupture est présentée sous forme de **probabilité de rupture du VER** en fonction de la contrainte à rupture du VER (figures 4.18, 4.20a et 4.21a). Un intervalle de contrainte de 5 MPa est choisi pour la largeur des histogrammes.

Loi normale

On propose de représenter cette probabilité de rupture par une **loi normale** en fonction d'une contrainte à rupture moyenne, noté $\sigma_{R,moy}$ et d'un écart type, noté $\Delta\sigma_R$. La loi normale s'exprime par sa densité de probabilité notée $f(\sigma_R)$ avec

$$f(\sigma_R) = \frac{1}{\Delta\sigma_R\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_R - \sigma_{R,moy}}{\Delta\sigma_R} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Identification

La contrainte moyenne $\sigma_{R,moy}$ et l'écart type $\Delta\sigma_R$ sont identifiés à partir de la distribution des contraintes à rupture σ_R calculées par EF. On utilise pour cela la fonction de répartition, notée $F(\sigma_R)$.

La fonction de répartition donne la probabilité pour que la rupture intervienne pour des contraintes inférieures ou égales à σ_R . D'une part, cette fonction de répartition est déterminée à partir des contraintes σ_R calculées par EF (figure 4.19).

D'autre part, la fonction de répartition se déduit de la densité de probabilité par

$$F(\sigma_R) = \int_{-\infty}^{\sigma_R} f(X) dX. \quad (4.12)$$

Pour la loi normale, la fonction de répartition s'écrit

$$F(\sigma_R) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma_R - \sigma_{R,moy}}{\Delta\sigma_R\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (4.13)$$

Etude de sensibilité

Parmi les paramètres modifiant la contrainte à rupture, on a analysé l'influence de la répartition des fibres dans le volume, du nombre de fibres dans le volume et de la longueur de décohésion.

Influence de la répartition des fibres

Les contraintes à rupture σ_R du VER sont d'abord calculées en choisissant un arrangement périodique des fibres dans le VER (figure 4.18). La cellule élémentaire comporte 8 fibres.

Pour comprendre l'influence de la répartition des fibres, plusieurs VER sont générés avec une répartition aléatoire des fibres. Hormis la répartition des fibres, les caractéristiques des volumes générés restent inchangées. Les calculs des contraintes à rupture du VER sont réalisés en modifiant à chaque calcul

- la distribution aléatoire des contraintes σ_{max} attribuées aux zones cohésives,
- la répartition des fibres dans le volume élémentaire.

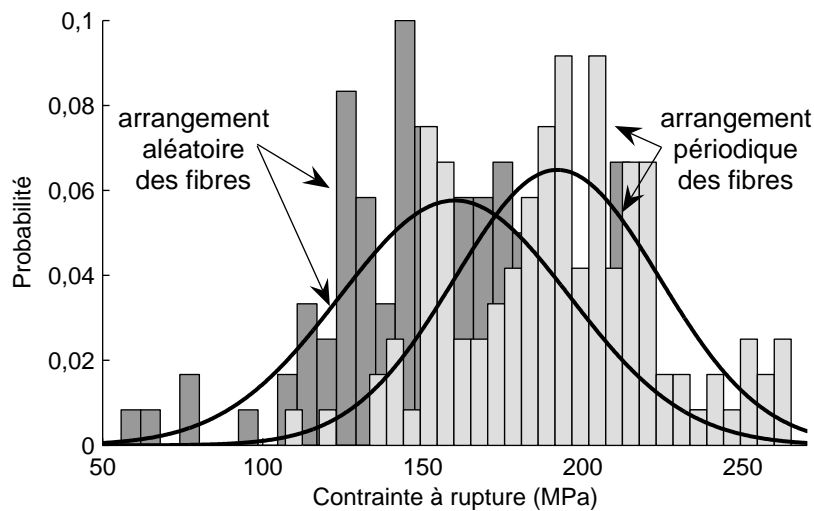


Figure 4.18 – Distribution des contraintes à rupture obtenues avec un arrangement périodique ou aléatoire : calculs EF (histogrammes) et loi normale (courbes).

La répartition aléatoire des fibres produit une plus grande dispersion $\Delta\sigma_R$ des valeurs des contraintes et une contrainte à rupture moyenne $\sigma_{R,moy}$ plus faible. Les valeurs de $\sigma_{R,moy}$ et de $\Delta\sigma_R$ sont identifiées en utilisant la fonction de répartition (figure 4.19 et tableau 4.4).

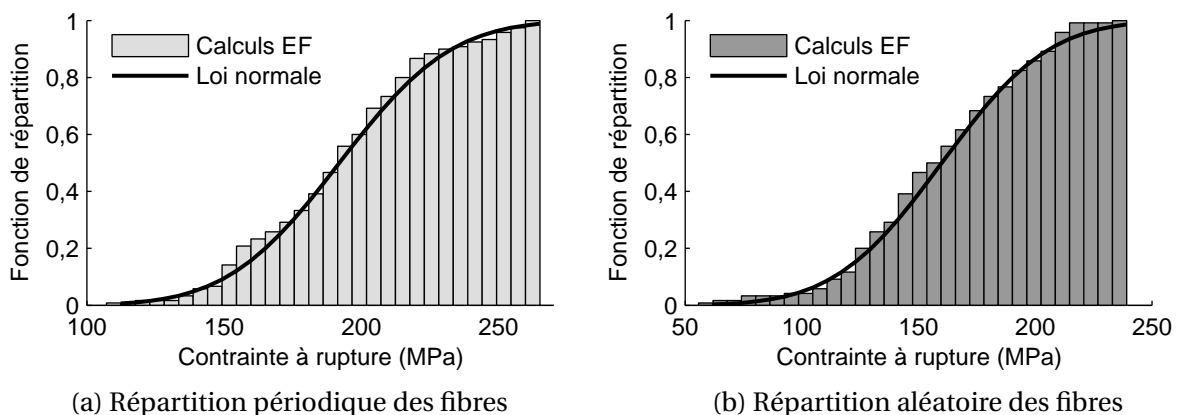


Figure 4.19 – Fonction de répartition des contraintes à rupture.

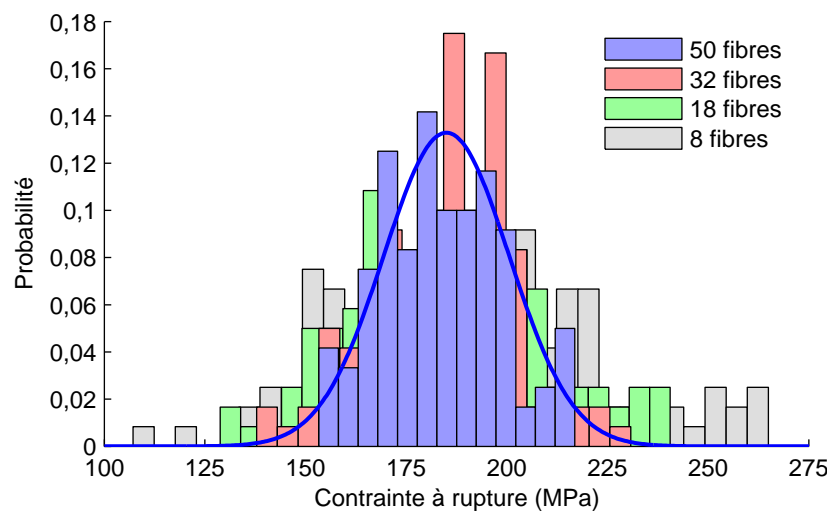
	Répartition périodique	Répartition aléatoire
Contrainte à rupture moyenne $\sigma_{R,moy}$	192 ± 5 MPa	160 ± 5 MPa
Ecart-type $\Delta\sigma_R$	30 ± 3 MPa	36 ± 3 MPa

Tableau 4.4 – Valeurs identifiées à partir de la fonction de répartition.

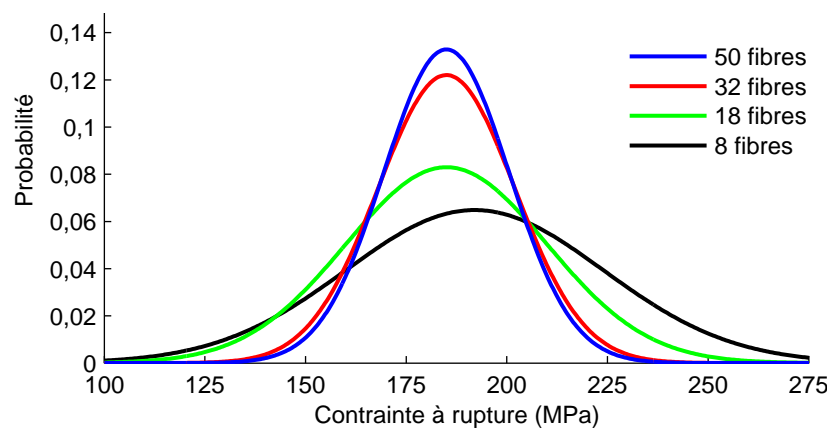
Nombre de fibres dans le volume élémentaire

Le nombre de fibres dans le volume élémentaire modifie le nombre de zones cohésives et les dimensions du volume. On étudie les contraintes à rupture calculées lorsque le nombre de fibres dans le VER augmente (figure 4.20).

On souhaite observer la convergence de la répartition des contraintes à rupture avec le nombre de fibres. Sous cette condition il existe un nombre de fibres suffisant, à partir duquel la répartition des contraintes à rupture ne dépend plus du nombre de fibres.



(a) Tirages aléatoires, calculs EF



(b) Loi Normale

Figure 4.20 – Distribution de la contrainte à rupture calculée en fonction du nombre de fibres dans le volume élémentaire.

Les caractéristiques du VER utilisées dans ce chapitre sont présentées dans le [tableau 4.3](#). L'arrangement des fibres est périodique. L'enveloppe des histogrammes est plus lisse et se rapproche de la loi normale, lorsque le nombre de fibres est élevé (figure 4.20a).

La dispersion des contraintes à rupture diminue avec le nombre de fibres. L'écart-type $\Delta\sigma_R$ décroît encore sensiblement entre 32 et 50 fibres ([tableau 4.5](#)).

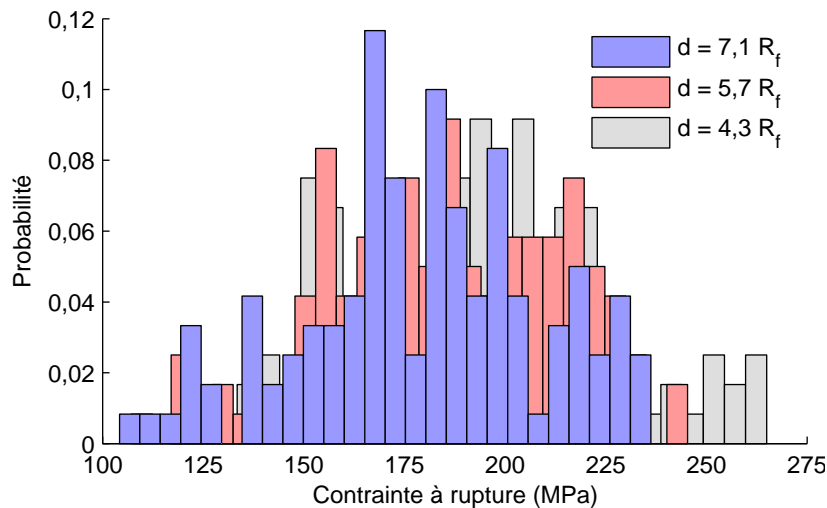
	8 fibres	18 fibres	32 fibres	50 fibres
Contrainte à rupture moyenne $\sigma_{R,moy}$	192 ± 5 MPa	184 ± 5 MPa	184 ± 3 MPa	184 ± 3 MPa
Ecart-type $\Delta\sigma_R$	30 ± 3 MPa	25 ± 3 MPa	17 ± 2 MPa	15 ± 2 MPa

Tableau 4.5 – Valeurs identifiées à partir de la fonction de répartition.

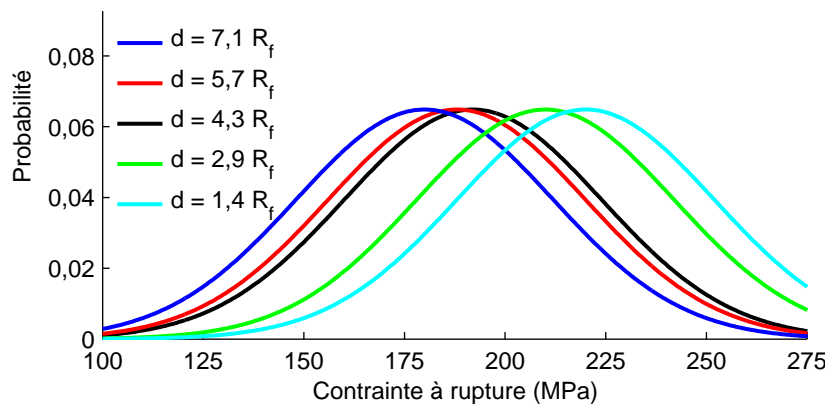
Influence de la longueur de décohésion

La décohésion introduit une zone de déchargement des contraintes dans les fibres. Les contraintes axiales supportées par les fibres sont plus élevées dans les zones de décohésion ce qui favorise la rupture de fibres.

Les contraintes à rupture du VER sont alors plus faibles avec une longueur de décohésion plus grande (figure 4.21). Les calculs sont réalisés pour des longueurs de décohésion $d = \{10; 20; 30; 40; 50\} \mu m$. La cellule élémentaire comporte 8 fibres arrangées périodiquement.



(a) Tirages aléatoires, calculs EF



(b) Loi Normale

Figure 4.21 – Distribution de la contrainte à rupture calculée en fonction de la longueur de décohésion dans le volume élémentaire.

La diminution des contraintes à rupture avec la longueur de décohésion se traduit par une contrainte à rupture moyenne $\sigma_{R,moy}$ décroissante (tableau 4.6).

Cependant la dispersion des valeurs des contraintes peut être considérée comme identique quelle que soit la valeur de la longueur de décohésion.

	$d = 7,1 R_f$	$d = 5,7 R_f$	$d = 4,3 R_f$	$d = 2,9 R_f$	$d = 1,4 R_f$
Contrainte à rupture moyenne $\sigma_{R,moy}$	$180 \pm 5 \text{ MPa}$	$188 \pm 5 \text{ MPa}$	$192 \pm 3 \text{ MPa}$	$210 \pm 3 \text{ MPa}$	$220 \pm 3 \text{ MPa}$
Ecart-type $\Delta\sigma_R$	$30 \pm 3 \text{ MPa}$	$30 \pm 3 \text{ MPa}$	$30 \pm 2 \text{ MPa}$	$30 \pm 2 \text{ MPa}$	$30 \pm 2 \text{ MPa}$

Tableau 4.6 – Valeurs identifiées à partir de la fonction de répartition.

II.4 Rupture : Bilan et perspectives

Contraintes à rupture du volume élémentaire

Les ruptures des fibres sont pilotées par un critère en contrainte σ_{max} attribué à chacune des zones cohésives dans le volume élémentaire. Les contraintes σ_{max} sont obtenues par la loi statistique de Weibull.

La modélisation de la rupture successive des fibres au sein du volume élémentaire (VER) permet de calculer la contrainte à rupture du VER.

Celle-ci dépend des valeurs aléatoires des contraintes σ_{max} . La distribution des contraintes à rupture du volume élémentaire est obtenue par plusieurs calculs avec à chaque calcul une nouvelle distribution aléatoire des contraintes σ_{max} .

La distribution des contraintes à rupture du VER est représentée par une loi normale.

Sensibilité aux paramètres et aux caractéristiques du VER

Les contraintes à rupture calculées dépendent de nombreux paramètres et des caractéristiques élémentaires du VER.

Un arrangement aléatoire des fibres aboutit à une contrainte à rupture moyenne plus faible et à une plus grande dispersion des valeurs des contraintes à rupture.

Les contraintes à rupture dépendent du nombre de fibres dans le VER. On observe que la répartition des contraintes à rupture converge avec l'augmentation du nombre de fibres : la contrainte moyenne ne varie plus et l'écart-type tend à diminuer jusqu'à 15 MPa en atteignant la valeur de 50 fibres dans le VER. L'objectif de cette étude est de déterminer le nombre de fibres suffisant pour ne plus en être dépendant.

De même que le nombre de fibres dans le VER, cette analyse doit être complétée par l'étude de la longueur des maillons dans lesquels sont insérés les zones cohésives.

La décohésion se traduit par une contrainte axiale plus élevée dans les fibres ce qui favorise leur rupture. Une longueur de décohésion plus grande produit une contrainte à rupture moyenne plus faible.

Identification des paramètres de rupture de fibres

La rupture des fibres est gouvernée par la loi statistique de Weibull et ses deux paramètres. Au cours de ce chapitre des valeurs arbitraires des paramètres de Weibull ont été choisis. On en a déduit la répartition des contraintes à rupture.

Une perspective de ce travail est d'identifier les valeurs de ces paramètres pour la rupture d'un minicomposite CMC en traction. Cette démarche est identique à celle utilisée par [Baxevanakis et al., 1995] pour la fragmentation des composites unidirectionnels.

Perspectives : critère de rupture

Le critère de rupture du fil obtenu dans cette étude et la loi normale modélisée pourraient être utilisés à l'échelle du composite tissé pour simuler la rupture du fil en traction, en complément de la loi de comportement endommageable développée à l'échelle du fil.

Conclusion

Le comportement endommageable du **fil** ou du minicomposite est modélisé par une loi 3D (figure 4.22). Les données d'entrée de cette loi de comportement sont les propriétés des fibres et de la matrice, ainsi que les paramètres nécessaires pour les lois d'endommagement.

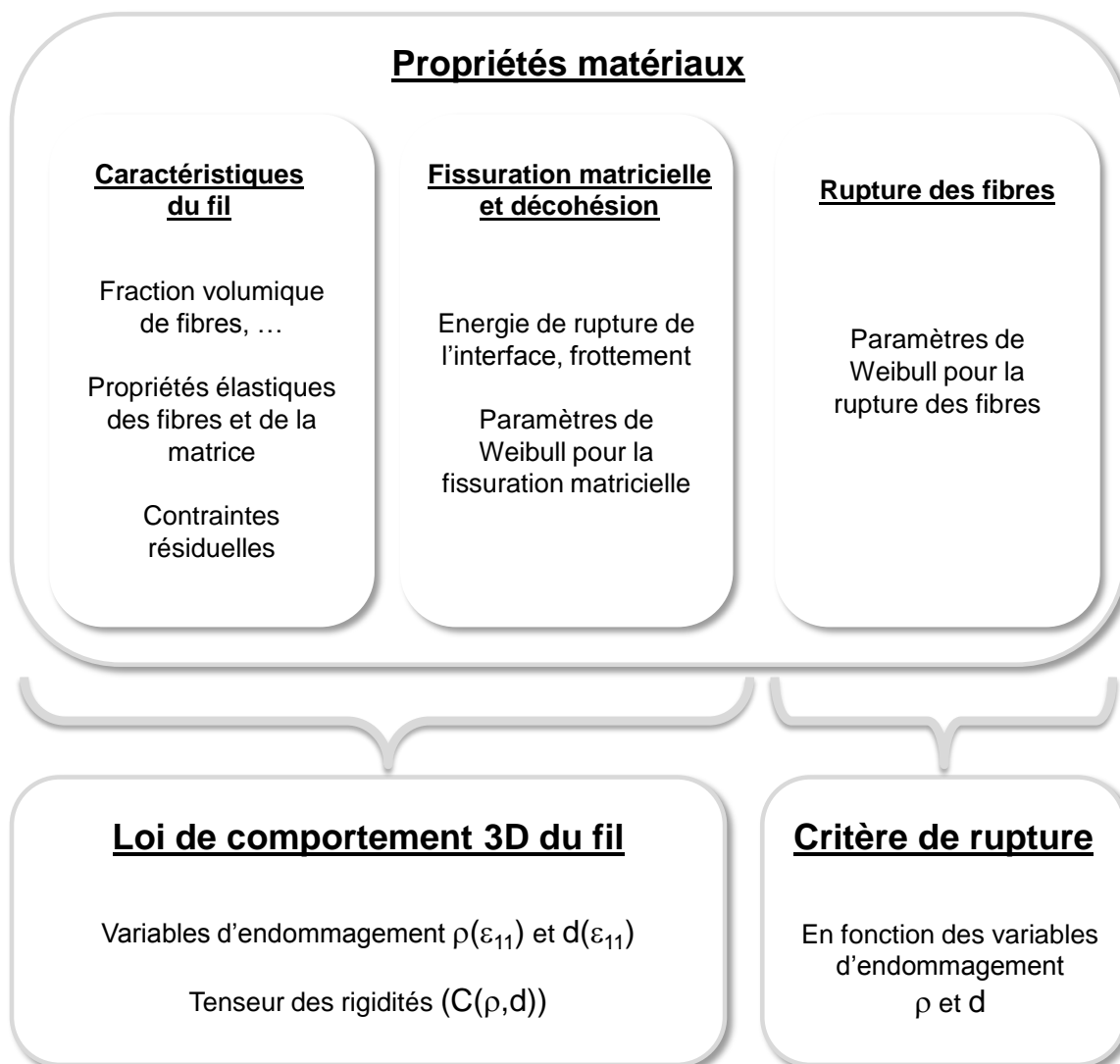


Figure 4.22 – Loi de comportement 3D et critère de rupture du fil unidirectionnel ou du minicomposite développée à partir des propriétés matériaux des constituants élémentaires.

Le comportement homogénéisé des fils longitudinaux et transversaux est utilisé par la suite pour modéliser le comportement du composite tissé.

Bibliographie

- ALFANO, G. et G. M. A. CRISFIELD. 2001, «Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues», *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 50, p. 1701–1736. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.93>.
- BAXEVANAKIS, C., D. JEULIN et J. RENARD. 1995, «Fracture statics of a unidirectional composite», *International journal of Fracture*, vol. 73, p. 149–181. URL <http://dx.doi.org/10.1007/bf00055726>.
- CORADI, A. 2009, *Industrialisation d'un logiciel de modélisation multiéchelle pour composites*, Stage de fin d'études, Snecma Propulsion Solide.
- COUÉGNAT, G. 2008, *Approche multiéchelle du comportement thermomécanique des matériaux composites à renfort tissé*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2008B0R13731>.
- ROUSSET, G. 2008, *Approche probabiliste de la durée de vie d'un composite unidirectionnel à matrice métallique en fatigue oligocyclique axiale*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.sudoc.fr/12407667X>.

Chapitre 5

Modélisation du comportement mécanique en traction d'un composite SiC/SiC

Sommaire

Introduction	172
I Microstructure et endommagement du composite tissé	173
I.1 Hétérogénéité de la microstructure	173
I.2 Endommagement sous chargement mécanique	173
II Les modèles d'endommagement existants	174
II.1 Approches phénoménologiques	174
II.2 Approches multiéchelles	175
II.3 Prédiction de la durée de vie	176
Effet de l'environnement	176
Durée de vie	176
III Simulation du comportement en traction d'un composite SiC/SiC	177
III.1 Choix de la cellule élémentaire	177
III.2 Modélisation de la fissuration matricielle	178
Modèle de zones cohésives à l'échelle du composite tissé	178
Evolution de la fissuration matricielle en traction	179
Bilan	180
III.3 Modélisation de la décohésion interfaciale	181
Modèle de zones cohésives	181
Evolution du réseau de fissures en traction :	
influence de l'énergie de rupture	181
Limites	184
III.4 Endommagement des fils longitudinaux	184
Conclusion	186
Bibliographie	188

Introduction

On considère à présent les **composites tissés** élaborés à partir des préformes fibreuses (figure 5.1). Les étapes d'élaboration consistent à tisser les fils ou torons unidirectionnels. La préforme fibreuse obtenue est ensuite densifiée par la matrice céramique grâce à des procédés spécifiques.

Le procédé d'élaboration conduit alors à une microstructure très hétérogène et très dépendante des étapes d'élaboration.

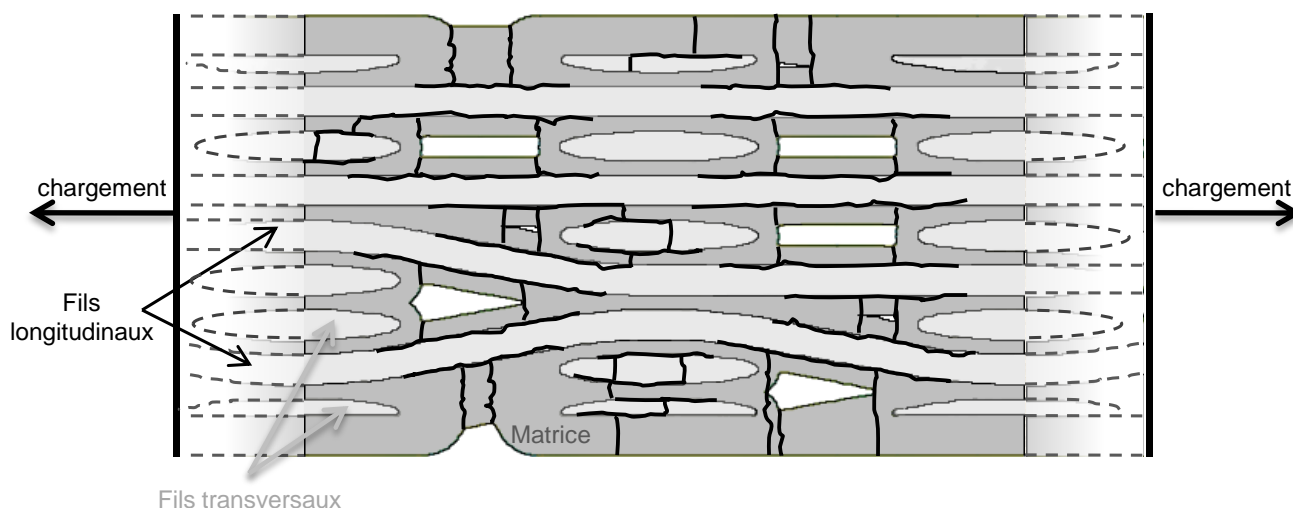


Figure 5.1 – Coupe du composite tissé à l'échelle mésoscopique et fissuration inter-fils en traction.

Les méthodes de dimensionnement actuelles des pièces structurales reposent sur des modèles phénoménologiques identifiés à l'échelle macroscopique. Ces approches intègrent peu les spécificités de ce type de matériau (hétérogénéités de la microstructure et des constituants, influence du procédé d'élaboration). Elles ne permettent pas non plus une description suffisamment détaillée des mécanismes physiques régissant le comportement et la rupture des CMC.

Ces dernières années, des efforts ont été entrepris afin de proposer des stratégies de modélisation qui permettent de mieux prendre en compte la réalité physique du matériau, et d'apporter ainsi un degré de confiance supplémentaire par rapport aux approches existantes.

Ce travail de thèse s'inscrit dans la continuité des travaux antérieurs. Au cours de ce chapitre, les éléments suivants sont abordés :

- **L'endommagement des CMC sous chargement mécanique.** Les constituants des CMC sont des matériaux fragiles et l'endommagement apparaît sous forme d'un réseau de fissures. Le développement de la fissuration au sein des CMC a déjà été étudié au LCTS.
- Les **principales approches de modélisation des CMC** sont ensuite présentées dans une bibliographie succincte.
- Enfin on propose de modéliser **l'évolution de la fissuration au sein du composite tissé sollicité en traction**. Les maillages EF représentatifs du composite tissé sont générés. Le développement de la fissuration inter-fil est simulé à l'aide d'un modèle de zones cohésives. La loi de comportement 3D du fil, développée au chapitre précédent, est utilisée par ailleurs pour simuler l'endommagement des fils longitudinaux.

I Microstructure et endommagement du composite tissé

I.1 Hétérogénéité de la microstructure

Le composite tissé est constitué des fils longitudinaux ou fils de trame, des fils transversaux ou fils de chaîne ainsi que de la matrice inter-fil entourant les fils (figure 5.1). Les principales caractéristiques du CMC à l'échelle mésoscopique sont :

- la fraction volumique des constituants fibre et matrice, les dimensions et l'espacement des fils après élaboration,
- l'architecture du tissage :
en premier lieu le composite peut être équilibré ou non, ce qui est défini par le ratio chaîne/trame. La conséquence est un comportement mécanique différent du CMC dans les directions trame et chaîne.
- la matrice multicouche ou multiséquencée :
le principal procédé de densification de la préforme fibreuse par la matrice céramique consiste à infiltrer la matrice céramique par voie gazeuse à haute température (CVI). En fait plusieurs étapes sont réalisées et la matrice inter-fil est constituée successivement de plusieurs couches autour des fils.
- la porosité inter-fil :
la densification de la préforme fibreuse par la matrice céramique, obtenue par infiltration ou dépôt, ne comble pas entièrement les espaces vides. Il en résulte des porosités résiduelles au sein du CMC. Outre un comportement moins rigide du composite moins densifié, la forme des pores peut favoriser l'amorçage de fissures en créant des zones de concentration de contraintes.

Ces paramètres de microstructure influent sur le comportement mécanique du CMC effectif. Les CMC peuvent être conçus "sur mesure" pour répondre aux nécessités d'une application donnée.

I.2 Endommagement sous chargement mécanique

Sous l'effet de chargements mécaniques, l'endommagement apparaît sous forme de fissuration des constituants du CMC, d'abord à l'échelle du composite tissé.

Ces mécanismes de fissuration et l'évolution du réseau de fissures au sein du CMC ont été étudiés au LCTS [Dupin, 2013] (figure 5.1). Les principaux mécanismes de fissuration sont :

- Dans un premier temps, **la fissuration de la matrice inter-fils** :
les fissures matricielles sont amorcées depuis la surface du CMC ou bien entre les fils au cœur du composite (figure 5.2).

Elles sont favorisées par les zones de concentration de contraintes résultant de l'état de surface ou des porosités, ainsi que les défauts potentiellement présents dans la matrice. Lors d'un essai de traction, les fissures matricielles sont très majoritairement perpendiculaires à l'axe de chargement.

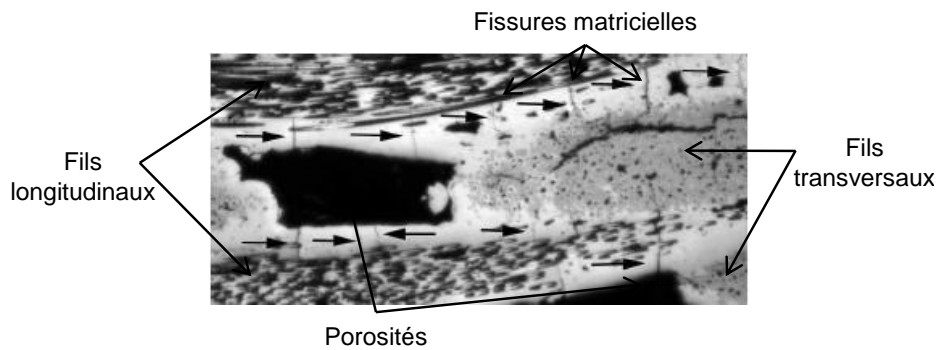


Figure 5.2 – Fissuration de la matrice inter-fil au sein du composite tissé (coupe transversale).

- La fissuration matricielle s’accompagne de **décohésions aux interfaces fil/matrice**,
- Ensuite on observe **la fissuration des fils transversaux et la déviation des fissures aux interfaces fil/fil** :

Sur la coupe du composite tissé représentée [figure 5.3](#), les fils transversaux sont identifiables par les sections de fibres perpendiculairement à l’axe des fibres.

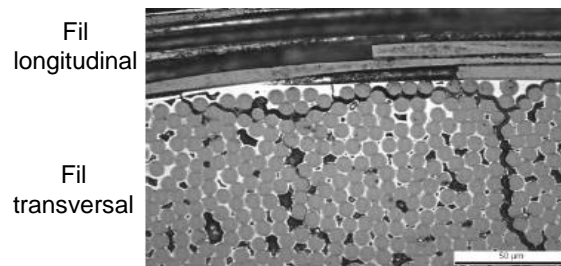


Figure 5.3 – Fissuration des fils transversaux (coupe transversale).

- Une fois que la matrice inter-fils (entourant les fils) est fissurée, les fils seuls supportent les efforts. On obtient alors **l’endommagement des fils longitudinaux** : Cela se traduit par la fissuration matricielle intra-fil et la décohésion interfaciale.
- Enfin la matrice inter-fils et intra-fils est déchargée par les fissurations matricielles et les efforts sont supportés par les fibres ce qui aboutit à **la rupture des fibres**, et donc des fils.

Les modèles de comportement mécanique des CMC doivent prendre en compte l’influence de chacun de ces mécanismes de fissuration.

II Les modèles d’endommagement existants

II.1 Approches phénoménologiques

Les modèles mécaniques décrivant le comportement endommageable des CMC sont pour la plupart fondés sur des approches phénoménologiques à l’échelle macroscopique. On peut en particulier citer les travaux menés à l’ENS Cachan (méso-modèle [[Ladevèze et Lubineau, 2001](#)]), le modèle ODM développé à l’ONERA [[Maire et Chaboche, 1997](#)], ou encore les travaux de [[Camus, 2000](#)] au LCTS avec le modèle SimCMC. Les variables internes sont identifiées à partir d’essais de comportement. Ces modèles sont efficaces pour le calcul de structure mais ils ne permettent pas réellement une description physique des mécanismes de dégradation

du matériau aux différentes échelles. Il est difficile d'accéder à la description du réseau de fissures à partir des variables d'endommagement qui interviennent.

Plus récemment, les travaux de [Marcin, 2010] utilisent le modèle ODM pour décrire macroscopiquement les mécanismes de dégradation du composite tissé. Pour l'évaluation du comportement des pièces jusqu'à la rupture, il prend en compte la rupture progressive des fils qui conduit à une réponse adoucissante du matériau après saturation des fissures matricielles. L'effet retard permet de réduire les difficultés numériques (localisation du dommage) dans les codes de calculs.

II.2 Approches multiéchelles

Des efforts ont été entrepris pour obtenir une description plus réaliste des mécanismes d'endommagement. [Couégnat, 2008] a développé une série d'outils qui permettent de :

- générer un maillage 3D représentatif d'un volume élémentaire d'un composite tissé (figure 5.4a),
- générer des familles de fissures représentant la propagation de l'endommagement dans un CMC (figure 5.4b),
- calculer les propriétés effectives d'un CMC endommagé par homogénéisation périodique.

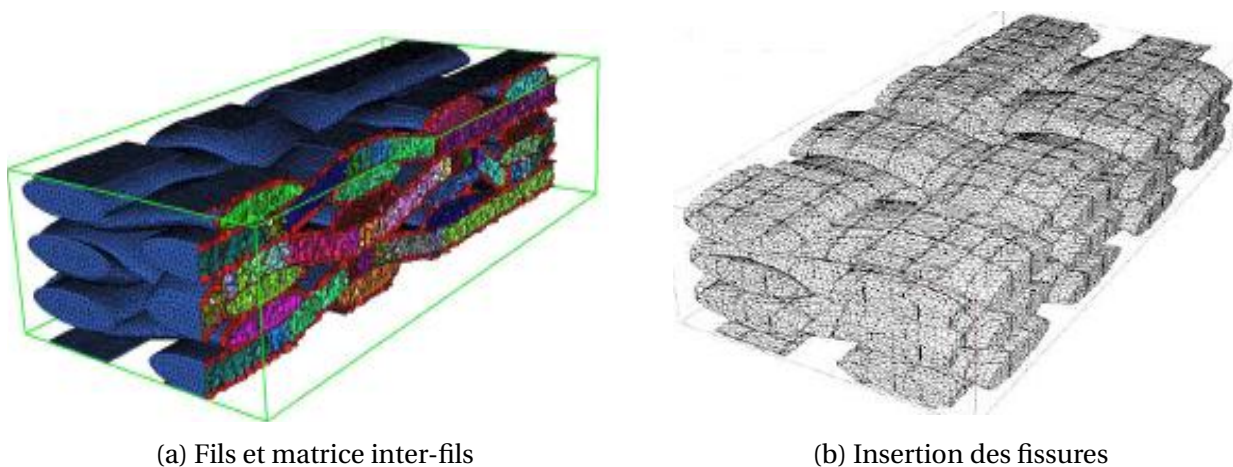


Figure 5.4 – Maillages représentatifs du composite tissé [Couégnat, 2008].

Ces outils de maillage ont permis de développer le modèle DMD dont les variables d'endommagement sont directement reliées aux familles de microfissures se développant dans un CMC. Cette approche s'inscrit dans une démarche multiéchelle, permettant d'établir des liens entre le comportement des constituants élémentaires et le comportement effectif du matériau.

[Couégnat, 2008] a démontré que cette approche fournit des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus à l'aide d'un modèle macroscopique de référence. L'approche DMD décrit correctement les couplages traction/cisaillement dans les mécanismes d'endommagement, mais il nécessite encore l'identification de certaines cinétiques d'endommagement à l'échelle macroscopique (identifiées par méthode inverse).

II.3 Prédiction de la durée de vie

Effet de l'environnement

La durée de vie du matériau dépend des phénomènes physico-chimiques même si la rupture ultime est d'origine mécanique. A moyenne température (500 – 800°C), le phénomène qui entraîne la rupture des fibres est la fissuration lente des fibres (fissuration sous critique), alors qu'à plus haute température, l'oxydation et le fluage interviennent. A haute température (>1200°C), le fluage des fibres se manifeste par une augmentation de la déformation et de l'endommagement sans modification du chargement appliqué à la structure. Une matrice est constituée de différentes séquences de phases comportant du silicium, du bore ou du carbone. Chacune de ces couches va s'oxyder dans des gammes différentes de température. L'oxydation de la couche de B_4C va entraîner la formation d'un verre fluide à haute température (bouchon de B_2O_3) qui va combler les fissures et ralentir la pénétration de l'oxygène au cœur du matériau vers les fibres.

Les travaux menés au LCTS ([Gauthier et al., 2006], [Laforêt, 2009]) ont permis de montrer que la fissuration lente activée par l'oxydation est le phénomène de rupture différé prépondérant dans les fibres SiC, aux températures inférieures à 800°C. Selon la température d'essai T et la contrainte σ appliquée à la fibre, sa durée de vie t est donnée par

$$t\sigma^n = A_0 \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right), \quad (5.1)$$

où E_a , A_0 , n et R sont des paramètres identifiés expérimentalement.

Durée de vie

Le LMT a développé une approche de modélisation de la durée de vie des CMC [Cluzel et al., 2009]. La partie mécanique comprend un modèle macroscopique dont les variables internes sont liées à la densité de fissuration matricielle (intra-fils et inter-fils). Ce modèle est utilisé pour construire un indicateur d'ouverture des fissures matricielles intra-fils. Le couplage avec l'environnement provient d'un modèle à l'échelle microscopique qui estime la concentration cumulée d'oxygène $\theta(t)$ au niveau des fibres dans un fil afin d'évaluer la résistance du fil σ_r à l'aide d'une loi de la forme

$$(\sigma_r)^n \theta(t) = B, \quad (5.2)$$

où n et B sont des constantes à identifier. Il est supposé que la rupture du fil annonce la rupture du composite.

[Genet, 2010] utilise les maillages des cellules mésoscopiques réalisées par [Couégnat, 2008]. Il implémente dans son code de calcul une loi de comportement macroscopique pour modéliser la matrice endommageable de manière continue. Le comportement des fils homogénéisés doit être obtenu en prenant en compte la fissuration matricielle intra-fil fondée sur le modèle du shear-lag, et en ajoutant une loi intrinsèque de réduction des propriétés mécaniques des fibres induites par la fissuration sous critique [Gauthier et al., 2006].

Les travaux de [Tranquart, 2012] à l'ENS Cachan concernent la modélisation d'un fil imprégné de matrice par voie liquide et gazeuse. Les outils et méthodes utilisés permettent de réaliser des maillages de la coupe transversale d'un fil représentative des micrographies. Des méthodes d'enrichissement global/local avec XFEM sont aussi employées. Les mécanismes de dégradation, de cicatrization matricielle et de fissuration sous critique des fibres doivent être pris en compte dans la résolution du calcul EF.

III Simulation du comportement mécanique en traction d'un composite SiC/SiC

Le comportement mécanique résulte du développement de la fissuration au sein du CMC. Ce travail de thèse s'inscrit dans la continuité des travaux menés au LCTS qui sont destinés à décrire le comportement mécanique du composite en fonction de l'état de dégradation physique du composite. Les variables d'endommagement sont donc définies par les densités et longueurs de fissuration associées à chacun des mécanismes décrits.

Les maillages des CMC à l'échelle du composite tissé, contenant les fissures, sont utilisés pour déterminer la réponse mécanique du composite à partir d'un état de fissuration donné (figure 5.3). On souhaite également simuler l'évolution du réseau de fissures au sein du composite tissé lors d'un chargement en traction. Pour cela, un modèle de zones cohésives est réalisé pour modéliser l'évolution de la fissuration à l'échelle du composite tissé.

L'amorçage des fissures matricielles inter-fils et les décohésions aux interfaces fils/matrice sont étudiés. L'évolution de ces deux mécanismes de fissuration, en fonction de l'effort de traction, dépendent des propriétés à rupture de la matrice inter-fil et de l'interface. Les calculs Eléments Finis (EF) et le modèle de zones cohésives (MZC) donnent alors la perte de rigidité du composite en traction et l'effet du développement de la fissuration.

III.1 Choix de la cellule élémentaire

On choisit d'utiliser des cellules élémentaires 2D représentatives de la microstructure du CMC. Le maillage est généré en fonction de l'architecture du tissage, des dimensions des fils et de l'épaisseur de matrice entourant les fils. Les porosités sont présentes. Les fils en forme d'ellipse sont générés suivant une répartition idéale. Les fils et la matrice inter-fils sont considérés comme homogènes.

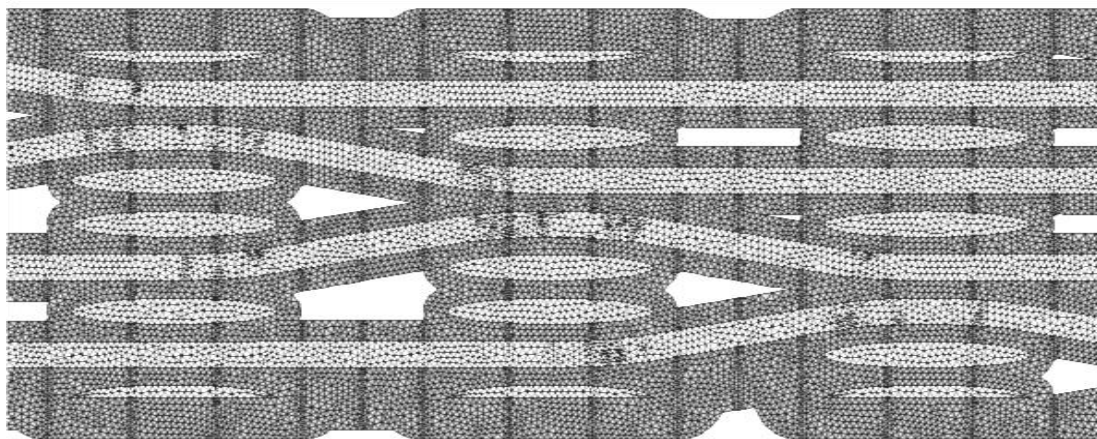


Figure 5.5 – Portion d'un maillage 2D du composite tissé.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus à partir du maillage illustré par la figure 5.5. L'influence de la longueur de la cellule élémentaire est étudiée. La taille des éléments du maillage est paramétrable.

Ce maillage EF est utilisé pour simuler l'évolution de la fissuration matricielle et interfaciale à l'échelle du composite tissé.

III.2 Modélisation de la fissuration matricielle

Modèle de zones cohésives à l'échelle du composite tissé

On étudie d'abord la fissuration de la matrice inter-fil. On souhaite modéliser l'amorçage des fissures matricielles en fonction d'un critère en contrainte.

Zones potentielles d'amorçage de fissures matricielles

Le modèle de zones cohésives nécessite en premier d'insérer les éléments cohésifs dans le maillage EF, aux endroits des amorçages potentiels de fissures. Lors de sollicitations en traction, les fissures matricielles sont amorcées principalement dans des directions perpendiculaires au chargement.

D'autre part, on suppose que les premières fissures sont créées dans les zones de contraintes élevées. La répartition des contraintes dans la cellule saine est analysée par EF. Des zones de concentrations de contraintes sont observées en surface du maillage et en bord de porosité.

On choisit d'insérer des zones cohésives au niveau des concentrations de contrainte. D'autres zones cohésives sont également insérées régulièrement le long de la cellule élémentaire [figure 5.5](#). Le maillage est raffiné au voisinage des zones cohésives.

Génération du maillage avec zones cohésives

Les outils de maillage réalisés précédemment par [[Couégnat, 2008](#)], permettant de générer la cellule élémentaire et d'insérer les fissures, sont utilisées. A partir de ces maillages, un développement supplémentaire a été fait pour créer les éléments cohésifs à l'endroit des fissures.

Loi d'endommagement pour modéliser la fissuration

Les zones cohésives sont placées à l'endroit des fissures matricielles potentielles. Leur amorçage effectif est piloté par la loi d'endommagement attribuée aux zones cohésives. Un modèle de zones cohésives a déjà été développé pour la fissuration matricielle du minicomposite ([chapitre 1](#), p. 39-40). On considère l'amorçage de fissure lors de sollicitations dans la direction normale de chargement (mode I).

Cette loi d'endommagement de la zone cohésive décrit la relation entre les efforts normaux et le déplacement relatif des nœuds des éléments cohésifs dans la direction normale. On propose d'utiliser à nouveau le modèle de Crisfield qui est adapté à l'amorçage de fissures au sein de matériaux fragiles ([figure 1.10](#), p. 40). La fissure matricielle est amorcée dès que la contrainte normale, supportée par l'élément cohésif, atteint la **contrainte notée σ_{max}** . L'ouverture de la fissure matricielle est alors définie par le déplacement relatif des nœuds.

Valeur de la contrainte d'amorçage σ_{max}

On souhaite modéliser l'amorçage successif des fissures matricielles au cours de la traction appliquée à la cellule élémentaire. On propose d'attribuer la même valeur de la contrainte σ_{max} à chacune des zones cohésives insérées dans le maillage. L'évolution successive des fissures matricielles dépend de la répartition des contraintes dans la matrice au cours du chargement ainsi que de la contrainte σ_{max} .

Evolution de la fissuration matricielle en traction

Le maillage bidimensionnel représentatif du composite tissé, contenant les zones cohésives pour la modélisation des amorçages de fissures, est soumis à une traction croissante dans la direction des fils longitudinaux (figure 5.5). Un déplacement croissant est imposé sur les extrémités de la cellule. Un état de déformation plane est supposé pour ces calculs 2D. Le critère d'amorçage des fissures matricielles est fixé à $\sigma_{max} = 400$ MPa.

Les fils et la matrice inter-fils ont un comportement élastique. On suppose que lors de l'amorçage des premières fissures matricielles, les fils longitudinaux et transversaux ne sont pas endommagés. Les calculs sont réalisés à partir d'un module élastique des fils $E_{fils} = 290$ GPa et de la matrice $E_m = 400$ GPa. Les coefficients de Poisson des fils et de la matrice sont $\nu_{fils} = 0,157$ et $\nu_m = 0,2$. Les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte.

Le comportement en traction obtenu et l'évolution de la fissuration matricielle lors du chargement en traction sont tracés dans les figures 5.6 et 5.7.

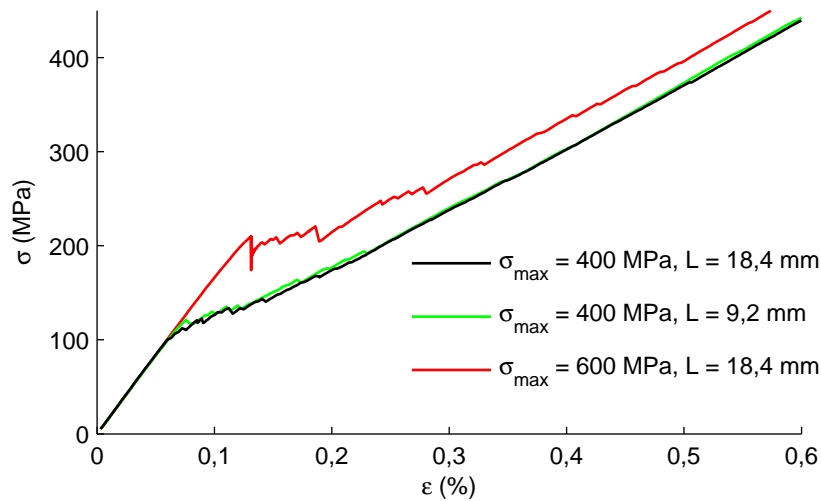


Figure 5.6 – Courbes contrainte/déformation lors de la traction du composite tissé.

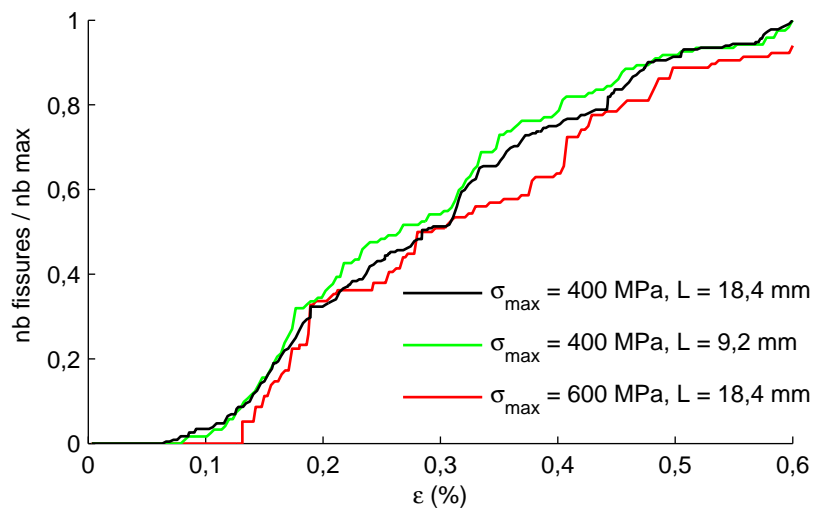


Figure 5.7 – Evolution du nombre de fissures dans la matrice en fonction de la déformation ϵ .

Les premières fissures sont amorcées dans les zones de contraintes élevées, puis les fissures suivantes sont créées progressivement au cours de l'effort appliqué (figure 5.7). L'augmentation du nombre de fissures matricielles ralentit en fin de chargement. L'amorçage des fissures est associé à des pertes de rigidité soudaines (figure 5.6). Ces pertes de rigidité sont nettement observables en raison des faibles dimensions de la cellule élémentaire.

Influence du critère d'amorçage et de la longueur de la cellule élémentaire

Les deux paramètres étudiés dans les figures 5.6 et 5.7 sont :

- la longueur du maillage,
- la valeur de la contrainte σ_{max} ,

On s'aperçoit que la cellule de longueur $L = 9,2$ mm donne des résultats similaires à la cellule de longueur deux fois plus grande $L = 18,4$ mm (courbes noire et verte). Pour les prochains calculs présentés dans ce chapitre, la cellule de longueur $L = 9,2$ mm a donc été sélectionnée.

Paramètres de calculs

La mise en œuvre de ce modèle requiert de choisir convenablement les paramètres décrivant la loi de comportement des zones cohésives, ainsi que les dimensions du maillage.

L'amorçage de la fissure est gouverné par un critère en contrainte σ_{max} . Sa propagation dépend de l'énergie de rupture qui s'exprime en fonction des paramètres de la loi de comportement de la zone cohésive. On a supposé une propagation de la fissure matricielle dans toute la zone cohésive dès l'amorçage de celle-ci. Cela nécessite de choisir une énergie de rupture faible. Les paramètres de la loi de Crisfield ont donc été choisis pour satisfaire cette condition.

L'utilisation de la loi d'endommagement pour simuler la fissuration demande aussi une rigidité suffisamment élevée des éléments de la zone cohésive jusqu'à l'amorçage de la fissure. La rigidité initiale s'exprime simplement à partir des paramètres du modèle de Crisfield. Comme pour la fissuration matricielle du minicomposite, une étude préalable a permis de déterminer les valeurs appropriées de ces paramètres.

D'autre part, la taille des éléments du maillage au voisinage des fissures potentielles a également été analysée.

Bilan

Les résultats de ce modèle indiquent une évolution progressive de la fissuration matricielle, qui dépend de la répartition des contraintes dans la matrice et de la contrainte maximale σ_{max} . La répartition des contraintes est calculée à partir de la microstructure du composite conférée principalement par le tissage, l'épaisseur de matrice et la forme des porosités.

On a supposé une contrainte σ_{max} de même valeur pour chacune des zones cohésives insérées dans le maillage. Une autre possibilité est de prendre en compte une distribution de défauts dans la matrice. Dans ce cas, la contrainte σ_{max} d'amorçage de la fissure matricielle dépend d'une probabilité de rupture du volume de matrice considéré. Les valeurs de σ_{max} attribuées aux zones cohésives sont distribuées suivant une loi statistique.

III.3 Modélisation de la décohésion interfaciale

Les fissures matricielles s'accompagnent de décohésions. On considère à présent les décohésions à l'interface entre la matrice et les fils. Ces mécanismes sont également modélisés par le biais d'un modèle de zones cohésives.

Modèle de zones cohésives

Le maillage présenté [figure 5.5](#), qui montre les zones cohésives utilisées pour décrire les fissures matricielles, est utilisé pour les calculs. D'autres zones cohésives sont ajoutées aux interfaces fils/matrice.

A l'amorçage de la fissure matricielle, la déviation de fissure et la propagation de la décohésion à l'interface sont pilotées par l'énergie de rupture de l'interface, noté G_i^c . On considère l'énergie de rupture associée à la propagation de la fissure en cisaillement (mode II). Comme pour l'évolution de la décohésion au sein du minicomposite, on choisit la loi d'endommagement de Tvergaard-Needleman pour le comportement des éléments cohésifs de l'interface ([chapitre 1](#), p. 53-54). Les paramètres de cette loi ont déjà été décrits et étudiés.

Les longueurs de décohésion qui sont créées avec l'amorçage des fissures matricielles dépendent de G_i^c . Une interface forte est alors paramétrée par une énergie de rupture élevée.

Le contact à l'interface fils/matrice est pris en compte sans frottement, dans les zones de décohésions. Les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte.

Evolution du réseau de fissures en traction : influence de l'énergie de rupture

Trois résultats de simulation sont présentés à partir des hypothèses suivantes :

- (a) Fissuration matricielle seulement,
- (b) Fissuration matricielle et décohésion interfaciale avec $G_i^c = 400 \text{ J.m}^{-2}$,
- (c) Fissuration matricielle et décohésion interfaciale avec $G_i^c = 200 \text{ J.m}^{-2}$.

Pour l'amorçage des fissures matricielles, on a choisi $\sigma_{max} = 400 \text{ MPa}$. Le comportement des fils et de la matrice est toujours considéré comme étant élastique linéaire. L'évolution de la fissuration au sein de la cellule élémentaire en traction est comparée suivant ces trois hypothèses ([figure 5.8](#)).

Les premières fissures matricielles sont amorcées à la fois depuis les surfaces de la cellule et à cœur du composite au niveau des porosités. Les décohésions sont créées depuis les fissures matricielles (b et c). Les longueurs de décohésion augmentent avec le chargement.

Au voisinage de la fissure matricielle et de la décohésion qui l'accompagne, la matrice est déchargée. Les longueurs de décohésion freinent l'amorçage de nouvelles fissures matricielles depuis les surfaces du composite.

De plus, au voisinage de la fissure matricielle et de la décohésion, les efforts sont repris au sein des couches plus internes du composite. Cela favorise de nouvelles fissures matricielles dans ces couches plus internes au cœur du composite.

La prise en compte des décohésions modifie l'évolution de la fissuration matricielle :

- le nombre de fissures matricielles est plus faible,
- les fissures matricielles au cœur du composite peuvent être amorcées plus précocement.

La propagation de la décohésion est favorisée par une énergie de rupture faible.

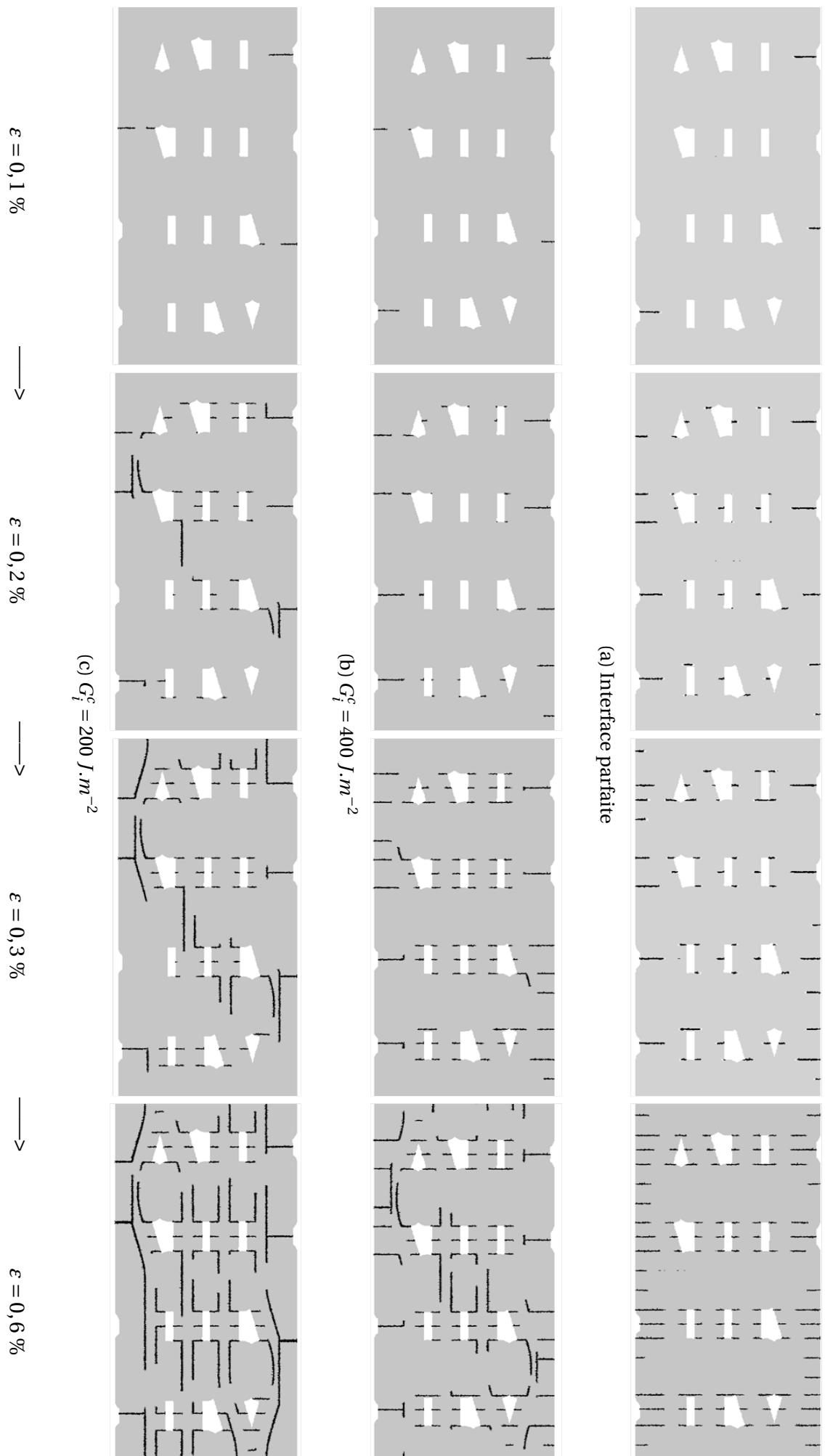


Figure 5.8 – Evolution de la fissuration matricielle et de la décohésion en fonction de la déformation appliquée ϵ , obtenue avec le modèle de zones cohésives.

Ces observations sont en accord avec l'évolution du nombre de fissures avec le chargement, tracée pour plusieurs valeurs de l'énergie de rupture (figure 5.10). Le développement de la fissuration matricielle est globalement moins important avec une énergie de rupture G_i^c plus faible. Cependant, on peut s'apercevoir qu'après les premiers amorçages de fissures, le nombre de fissures matricielles peut être ponctuellement plus élevé. Cela résulte des amorçages de fissures matricielles plus précoces au cœur du composite en présence de décohésions.

Les réponses modélisées en traction correspondent bien au comportement du composite possédant une interface plus ou moins faible : après l'amorçage des premières fissures matricielles, une énergie de rupture faible conduit à un comportement moins rigide, ce qui est induit par des décohésions de plus grande longueur (figure 5.9).

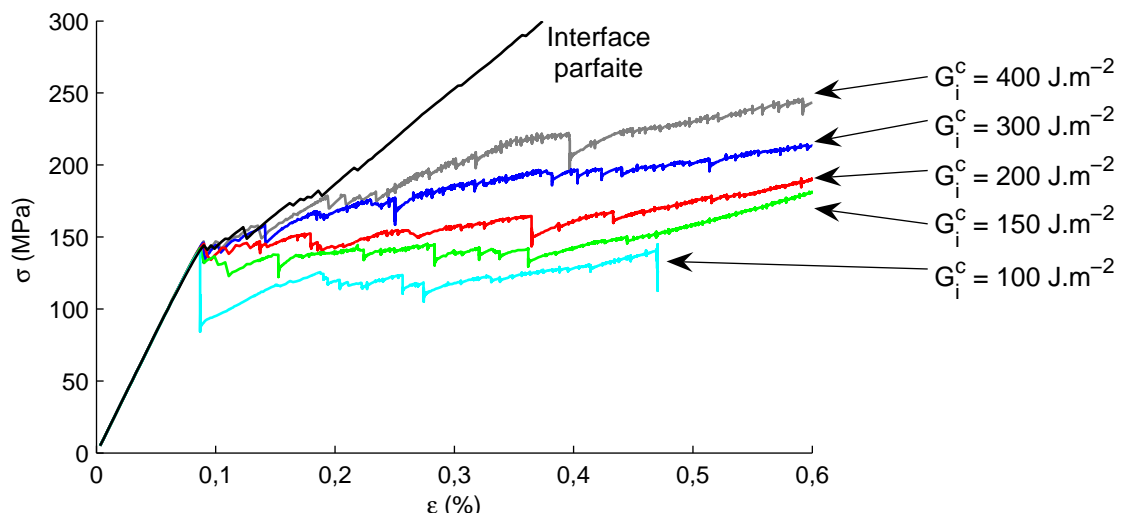


Figure 5.9 – Courbes contrainte/déformation lors de la traction du composite tissé. Les résultats des calculs EF sont comparées en fonction de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c .

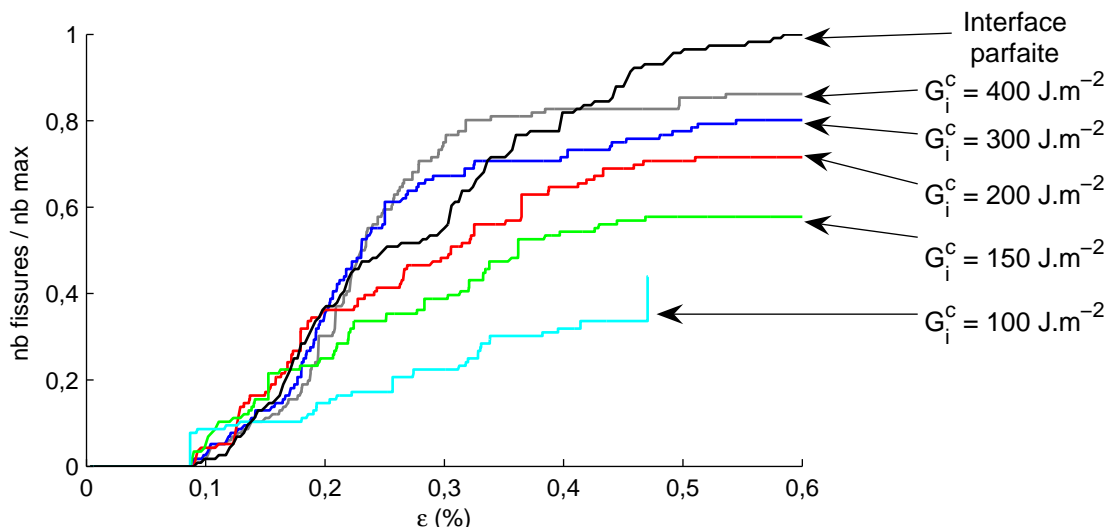


Figure 5.10 – Evolution du nombre de fissures dans la matrice en fonction de la déformation ε .

Limites

On remarque que les valeurs des énergies de rupture G_i^c étudiées sont très élevées. Elles sont bien plus grandes que les valeurs identifiées à l'échelle du fil. Des valeurs de G_i^c inférieures 100 J.m^{-2} produisent des décohésions de très grande dimension à l'amorçage des fissures matricielles. Les déviations de fissures sont très rapides et la décohésion atteint toute la longueur des fils presque instantanément. Parmi les travaux antérieurs, peu de références mentionnent les propriétés de l'interface à l'échelle du composite tissé.

Ces simulations ont été réalisées à partir de cellules 2D sous hypothèse de déformations planes. La microstructure 3D du composite n'est alors pas respectée.

De plus, la prise en compte des contraintes résiduelles et des interfaces frottantes permettrait de réduire les longueurs de décohésion, donc les valeurs de G_i^c .

III.4 Endommagement des fils longitudinaux

Les fissures de la matrice et les décohésions provoquent le déchargement de la matrice au voisinage des fissures. Les fils longitudinaux au cœur du composite supportent alors des efforts plus élevés ce qui peut contribuer à leur endommagement. Ce paragraphe est consacré à la modélisation de l'endommagement des fils longitudinaux au sein du composite tissé endommagé.

On propose d'utiliser la loi de comportement endommageable du fil développée précédemment ([chapitre 4](#)). Cette loi 3D décrit le comportement du fil longitudinal, l'évolution de la densité de fissuration matricielle inter-fils et les longueurs de décohésion. Pour s'adapter au calcul 2D du composite tissé en traction, cette loi 3D a été convertie en loi de comportement 2D.

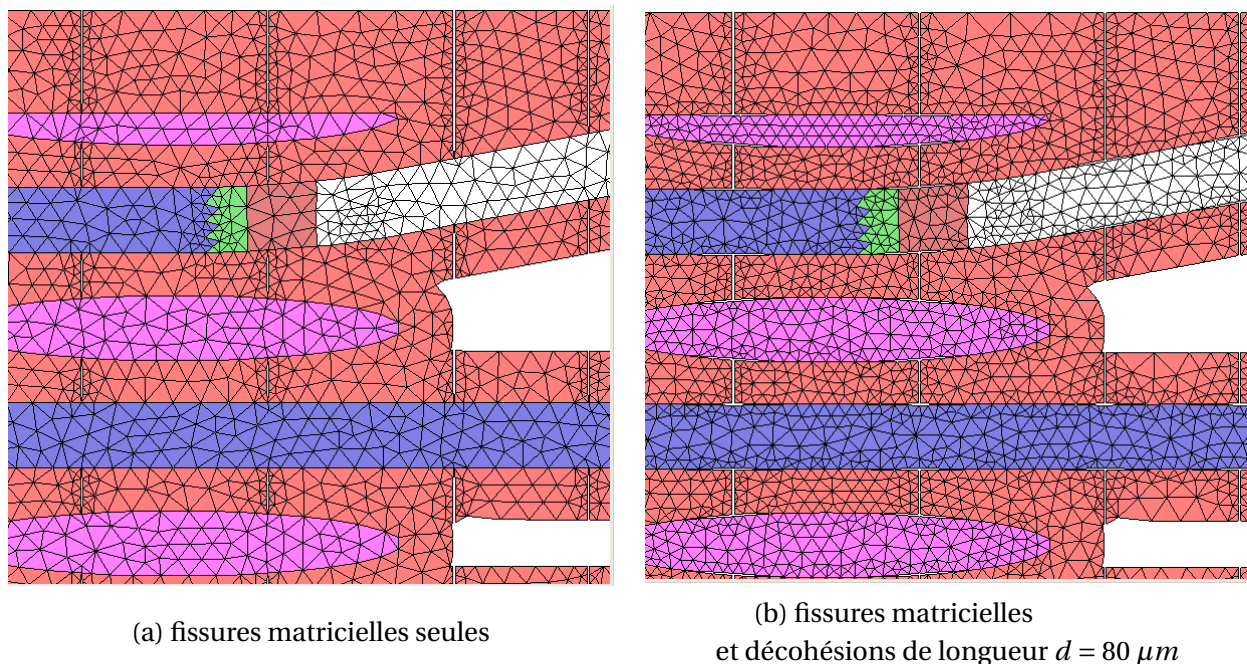


Figure 5.11 – Maillages 2D contenant les fissures matricielles et les décohésions aux interfaces fils/matrice.

On suppose un état de fissuration donné à l'échelle du composite tissé. Le nombre et l'emplacement des fissures matricielles inter-fil sont fixés, de même que les longueurs de décohésion associées à chacune des fissures matricielles. Les fissures matricielles et les décohésions sont insérées directement au sein du maillage EF (figure 5.11). Au cours de ces calculs, ces fissures n'évoluent pas.

Un déplacement croissant est à nouveau imposé sur les extrémités de la cellule représentative du composite tissé contenant les fissures. La loi de comportement endommageable utilisée pour les fils longitudinaux permet d'observer l'évolution de la fissuration dans les fils (figure 5.12).

L'endommagement des fils longitudinaux est présent d'abord dans les zones de décharge-ment de la matrice, au niveau des fissures matricielles inter-fils. Puis l'endommagement a tendance à s'uniformiser dans tout le fil jusqu'à saturation de l'endommagement de celui-ci.

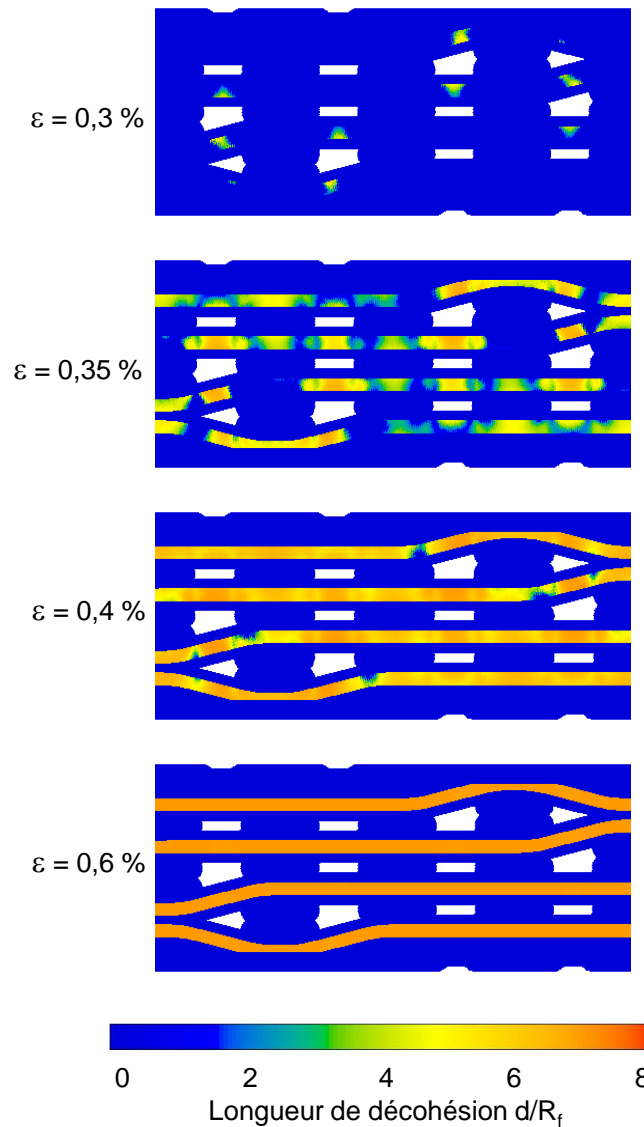


Figure 5.12 – Evolution de l'endommagement dans le fil longitudinal au sein du composite tissé en traction. On a choisit de représenter l'évolution de la longueur de décohésion d au sein des fils longitudinaux, normalisée par rapport au rayon de fibres R_f . La déformation imposée est ε . Le maillage représenté figure 5.11b a été utilisé avec une longueur de décohésion inter-fil de $80 \mu m$.

Conclusion

Modélisation de la fissuration mésoscopique

L'objectif de ce chapitre était de modéliser l'évolution de la fissuration à l'échelle mésoscopique dans le composite tissé en traction.

Un modèle de calcul par EF a été développé. L'évolution de la fissuration est simulée par un modèle de zones cohésives. Cela nécessite de connaître par avance l'emplacement et la direction des fissures potentielles. Les zones cohésives sont insérées dans les maillages 2D représentatifs du composite tissé. Les caractéristiques de la microstructure du composite, à cette échelle, font alors partie des données d'entrée de ce modèle.

L'évolution du nombre de fissures matricielles inter-fils, ainsi que des décohésions qui les accompagnent, est calculée à partir des propriétés à rupture de la matrice et de l'interface : L'amorçage des fissures matricielles dépend de la contrainte supportée par la matrice lors de la création de la fissure. La propagation de la décohésion à l'interface dépend de l'énergie de rupture interfaciale.

Au cours de cette étude, on a supposé que l'amorçage de toutes les fissures matricielles est piloté par la même valeur de la contrainte critique supportée par la matrice. La fissuration progressive de la matrice résulte alors de la variation des contraintes dans la matrice au sein du composite tissé. Celle-ci provient de l'hétérogénéité de la microstructure, résultant essentiellement du tissage et des porosités. Pour enrichir ce modèle, on peut prendre en compte la présence des défauts potentiellement présents dans la matrice. Dans ce cas, la contrainte à rupture attribuée à chaque zone cohésive est déterminée en fonction d'une loi statistique.

Comportement du CMC en fonction de l'état d'endommagement physique

Cette thèse s'inscrit dans la démarche de modélisation du comportement des CMC à partir de leurs états d'endommagement physique. Les outils de maillage du composite tissé et d'insertion de fissures à cette échelle, développés précédemment au LCTS, ont été utilisés. Les propriétés mécaniques du composite, à un état d'endommagement donné, sont calculées à partir du réseau de fissuration du composite. L'étude présentée dans ce chapitre a pour finalité de décrire l'évolution de la fissuration à l'échelle du composite tissé, en fonction du chargement mécanique.

Pour compléter ce modèle de fissuration, il est nécessaire de prendre en compte d'autres mécanismes de fissuration tels que la fissuration des fils transversaux. En reprenant la démarche proposée, il suffit d'insérer de nouvelles zones cohésives dans les fils transversaux. L'amorçage de ces fissures peut être paramétré par un critère en contrainte.

Un chargement en traction a été considéré. Les mécanismes d'endommagement du composite tissé et leur ordre d'apparition ont fait l'objet de nombreuses études et sont bien connus. Cela inclut des directions de propagation des fissures. Dans le cas de sollicitations mécaniques quelconques, les directions de propagation sont beaucoup moins prévisibles. Ce modèle de zones cohésives est adapté à la modélisation de l'évolution de la fissuration à condition d'avoir identifié préalablement les directions des fissures. Dans le cas contraire, d'autres solutions numériques existent et doivent être développées.

Perspectives : prise en compte des mécanismes physico-chimiques

L'ouverture de fissures matricielles est croissante avec le chargement en traction. A l'échelle du composite tissé, le modèle de zones cohésives permet de calculer les ouvertures des fissures matricielles inter-fils. Après l'amorçage des fissures inter-fils, les fils longitudinaux supportent seuls les efforts, ce qui favorise à leur tour leur endommagement. La loi de comportement endommageable du fil, développée précédemment, permet de prendre en compte l'évolution de la densité de fissuration matricielle intra-fils et des décohésions au sein des fils longitudinaux. Il est possible d'inclure le calcul de l'ouverture des fissures matricielles dans les fils longitudinaux. Ces ouvertures de fissures ont déjà été exprimées en fonction de l'état d'endommagement du fil, du chargement de traction et des caractéristiques du fil.

Les ouvertures de fissures sont les accès de l'atmosphère environnante jusqu'aux fibres. En atmosphère oxydante, les fibres céramiques peuvent alors subir les dégradations de l'oxydation. L'estimation des ouvertures de fissures est nécessaire si on souhaite par la suite prendre en compte l'effet de l'environnement et des mécanismes physico-chimiques. A partir du modèle présenté dans ce chapitre, une piste serait d'enrichir la loi de comportement des fils : il faudrait considérer les dégradations des fibres soumises à l'oxydation, ce qui dépend entre autres des ouvertures de fissures.

Bibliographie

- CAMUS, G. 2000, «Modelling of the mechanical behavior and damage processes of fibrous ceramic matrix composites : application to a 2-d sic/sic», *International journal of Solids and Structures*, vol. 37, n° 6, p. 919–942. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0020-7683\(99\)00065-7](http://dx.doi.org/10.1016/s0020-7683(99)00065-7).
- CLUZEL, C., E. BARANGER, P. LADEVÈZE et A. MOURET. 2009, «Mechanical behaviour and life-time modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air», *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, vol. 40, n° 8, p. 976–984. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2008.10.020>.
- COUÉGNAT, G. 2008, *Approche multiéchelle du comportement thermomécanique des matériaux composites à renfort tissé*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2008B0R13731>.
- DUPIN, C. 2013, *Etude du comportement mécanique des matériaux composites à matrice céramique de faible épaisseur*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2013B0R14917>.
- GAUTHIER, W., J. LAMON et R. PAILLER. 2006, «Fatigue statique de monofilaments et de fils SiC Hi-Nicalon à 500 °C et 800 °C», *Revue des composites et des matériaux avancés*, vol. 16, n° 2, p. 221–241. URL <http://dx.doi.org/10.3166/rcma.16.221-241>.
- GENET, M. 2010, *Vers un matériau virtuel pour les composites céramiques*, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure, Cachan. URL <http://www.theses.fr/2010DENS0007>.
- LADEVÈZE, P. et G. LUBINEAU. 2001, «On a damage mesomodel for laminates : micro-meso relationship, possibilities and limits», *Composites Science and Technology*, vol. 61, n° 15, p. 2149–2158. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538\(01\)00109-9](http://dx.doi.org/10.1016/s0266-3538(01)00109-9).
- LAFORÊT, A. 2009, *Rupture différée en fatigue statique aux très hautes températures (800° - 1300°) des fils Hi-Nicalon, des composites Hi-Nicalon/Type PyC/SiC et des composites Hi-Nicalon/Type PyC/B4C*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2009B0R13783>.
- MAIRE, J. et J. CHABOCHE. 1997, «A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials», *Aerospace Science and Technology*, vol. 1, n° 4, p. 247–257. URL [http://dx.doi.org/10.1016/s1270-9638\(97\)90035-3](http://dx.doi.org/10.1016/s1270-9638(97)90035-3).
- MARCIN, L. 2010, *Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1. URL <http://www.theses.fr/2010B0R13994>.
- TRANQUART, B. 2012, *Vers un matériau virtuel pour l'optimisation qualitative d'une nouvelle famille de CMCs*, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure, Cachan. URL <http://www.theses.fr/2012DENS0014>.

Conclusion générale

L'objectif de ces travaux était de modéliser l'évolution du réseau de fissures dans un CMC par une approche multiéchelle. La fissuration matricielle et les décohésions interfaciales ont été simulées à l'échelle du fil. L'endommagement du fil a été pris en compte pour la modélisation à l'échelle du composite tissé.

L'intérêt de la démarche mise en œuvre au cours de cette thèse est la simulation de l'état de dégradation physique du composite. Le comportement mécanique évalué est la conséquence directe du développement du réseau de fissures.

De plus, les modèles et outils numériques élaborés sont directement fondés sur les propriétés des constituants élémentaires du composite : les fibres, la matrice et l'interface. Le matériau composite est conçu pour répondre aux spécifications de l'application pour laquelle il va être fabriqué. La connaissance du comportement mécanique, à partir des propriétés des constituants élémentaires, fournit une aide au concepteur de ces matériaux composites.

Analyse des mécanismes d'endommagement dans le minicomposite

Une grande partie des travaux de cette thèse a été consacrée à l'analyse du minicomposite sollicité en traction. Celui-ci est représentatif de l'échelle du fil. Les mécanismes intervenant dans la fissuration du minicomposite en traction ont été étudiés un à un.

La fissure matricielle seule entraîne une zone de transfert de contrainte entre la matrice et la fibre. La plupart des modèles micromécaniques ne considèrent pas l'influence de la fissure matricielle sur la réponse en traction ou sur l'ouverture des fissures. La perte de rigidité résultante des fissures matricielles est paramétrée par le coefficient D_1^0 , calculé par Eléments Finis à partir des caractéristiques du minicomposite.

La fissure matricielle s'accompagne de décohésions interfaciales. Une analyse énergétique a été proposée pour décrire le début de la propagation de la décohésion. Une expression du taux de restitution d'énergie pour la propagation de la décohésion interfaciale, a été obtenue. On en a déduit la contrainte axiale notée σ^{ci} appliquée sur le minicomposite lors du début de propagation de la décohésion. Cette contrainte σ^{ci} dépend notamment de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c .

La propagation de la décohésion, au cours du chargement en traction, dépend aussi de la présence du frottement à l'interface entre la fibre et la matrice. Ce frottement a été pris en compte par la loi de Coulomb. L'intensité du frottement dépend alors du coefficient de frottement μ ainsi que de la pression radiale exercée par la matrice sur la fibre. Les contraintes résiduelles d'origine thermique sont prises en compte. Le coefficient de frottement est une propriété intrinsèque du minicomposite. Il caractérise le comportement interfacial contrôlé par le matériau d'interphase et l'état de surface des fibres.

L'amorçage progressif des fissures matricielles est modélisé par la loi statistique de Weibull. La contrainte supportée par la matrice, lors de l'amorçage de la fissure, dépend de la probabilité de rupture du volume de matrice considéré.

Modèle de comportement du minicomposite sollicité en traction

Un modèle semi-analytique a été développé pour simuler l'évolution de la densité de fissures matricielles $\rho(\sigma)$, de la longueur de décohésion $d(\sigma)$, de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, \rho(\sigma), d(\sigma))$ et de l'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma, d(\sigma))$.

Ce modèle est fondé sur une description réaliste de la répartition des contraintes au sein du minicomposite, dans la zone endommagée. Le comportement en traction obtenu a été comparé aux résultats d'un modèle de zones cohésives, développé spécialement à partir des mêmes hypothèses. La comparaison des résultats des deux modèles est satisfaisante.

Le modèle semi-analytique développé dépend donc des propriétés de la fibre, de la matrice, de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c , du coefficient de frottement μ et des paramètres de la loi statistique de Weibull pour la fissuration matricielle. Ces propriétés ont été identifiées par la comparaison de la réponse en traction du modèle semi-analytique avec les résultats d'essais de traction sur minicomposites.

Le rôle des différentes propriétés et paramètres sur la réponse en traction est clairement identifié.

Endommagement du fil dans le composite tissé

Le modèle du minicomposite permet d'écrire l'évolution de la densité de fissures matricielles (ρ) et de la décohésion interfaciale (d) du fil sollicité en traction. L'utilisation de ces lois vise à la modélisation de l'endommagement du fil dans le composite tissé. Il faut alors déterminer les propriétés mécaniques tridimensionnelles du fil endommagé.

Le tenseur de rigidité du fil endommagé est calculé par Eléments Finis à partir de maillages représentatifs du fil contenant les fissures. Une procédure automatique a été développée. On en déduit les lois d'évolution des caractéristiques mécaniques en fonction de ρ et de d .

La rupture successive des fibres dans le fil en traction a aussi été étudiée. Un modèle de zones cohésives a été développé. La distribution des contraintes à rupture du fil est calculée par rapport à la distribution aléatoire des contraintes à rupture des fibres, donnée par la loi statistique de Weibull.

Modèle numérique pour le développement de la fissuration à l'échelle du composite tissé

A l'échelle du composite tissé, un modèle numérique a été proposé pour simuler l'amorçage des fissures matricielles inter-fils et des décohésions aux interfaces fils/matrice. Ce modèle est fondé sur le maillage représentatif du composite tissé. Les fils sont supposés avoir un comportement homogène équivalent. Des zones cohésives sont insérées dans le maillage Eléments Finis à l'endroit présumé des fissures.

Ces simulations ont permis d'observer l'interaction entre le développement de la fissuration matricielle et des décohésions interfaciales dans le composite tissé contenant plusieurs plans.

Perspectives : Vers la modélisation de la durée de vie

Ce travail de thèse était consacré au développement de la fissuration au sein du composite aux différentes échelles. Cependant la prise en compte des mécanismes physico-chimiques lors de l'oxydation des fibres est nécessaire pour la modélisation de la durée de vie.

Les modèles et outils développés peuvent être complétés pour prendre en compte la dégradation de l'interface et des fibres en fonction du flux d'oxygène entrant au cœur du composite. Le réseau de fissures généré par l'endommagement mécanique fournit les chemins d'accès de l'atmosphère environnante jusqu'au cœur du composite. Les ouvertures de fissures matricielles, modélisées à l'échelle du composite tissé et à l'échelle du fil, font parties des paramètres d'entrée des modèles de durée de vie.

Annexes

Annexe A

Répartition des contraintes au voisinage de la décohésion interfaciale

Cette étude concerne l'analyse des mécanismes de fissuration matricielle et de décohésion interfaciale au sein du microcomposite ou minicomposite en traction (chapitre 2). Les principaux modèles micromécaniques considérant le glissement frottant ont déjà été exposés (chapitre 2 section I, page 75). Parmi les travaux sur le transfert de charge fibre/matrice dans un composite unidirectionnel, on retient les **expressions analytiques de [Mc Cartney, 1989]** pour décrire le champ de contraintes au voisinage de la décohésion interfaciale accompagnant la fissure matricielle. Une interface frottante possédant une énergie de rupture nulle est considérée avec une décohésion de longueur d . Mc Cartney propose un modèle analytique pour décrire le transfert de charge avec le glissement frottant de type Coulomb.

Il utilise la représentation du microcomposite par deux cylindres concentriques de rayon R_f pour la fibre et R_m pour la matrice. L'interface est frottante sur toute la longueur du microcomposite. La fraction volumique de fibre est donnée par $V_f = \frac{R_f^2}{R_m^2}$. Les contraintes résiduelles sont prises en compte ainsi que la différence des coefficients de Poisson entre la fibre et la matrice.

Les composantes du champ de contrainte sont notées de la façon suivante dans le système de coordonnées cylindriques :

$\sigma_z^f(r, z), \sigma_z^m(r, z)$: contraintes axiales de la fibre et de la matrice le long de l'axe z ,

$\sigma_r^f(r, z), \sigma_r^m(r, z)$: contraintes radiales,

$\sigma_{rz}^f(r, z), \sigma_{rz}^m(r, z)$: contraintes tangentielles.

Le microcomposite est libre sur la surface de la matrice pour $r = R_m$, soit $\sigma_z^m(R_m, z) = 0$ et $\sigma_{rz}^m(R_m, z) = 0$. Il s'agit alors des conditions aux limites CL I. Les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites à l'interface et sur la surface de matrice ($r = R_m$) sont satisfaites exactement par les équations du modèle. Une solution approchée est proposée pour satisfaire au mieux les conditions aux limites de la fissure matricielle et les relations raccordant les contraintes, les déformations et les déformations thermiques. Les relations contraintes-déformations sont satisfaites en moyenne dans chaque section. Ces dernières relations résolues exactement conduiraient à une analyse complexe [Smith et Spencer, 1970].

On s'intéresse d'abord aux principales équations de ce modèle avant d'analyser la **répartition du champ de contrainte supporté par le microcomposite en traction uniaxiale**. L'évolution de la contrainte axiale dans la matrice le long du microcomposite est comparée avec un calcul Eléments Finis (EF). Enfin le modèle de Mc Cartney permet d'estimer le déplacement axial moyen de la fibre et de la matrice dans le microcomposite endommagé en traction. Il est alors possible d'**approcher l'ouverture de la fissure matricielle** au cours du chargement et en fonction de la longueur de décohésion. L'ouverture de la fissure modélisée par le modèle de Mc Cartney est comparée aux résultats EF obtenus avec le modèle de zones cohésives (chapitre 2 section IV, page 91). Quatre points seront donc abordés :

1. Principales équations du modèle,
2. Champ de contraintes,
3. Comparaison de la contrainte axiale dans la matrice avec le modèle EF,
4. Estimation de l'ouverture de la fissure matricielle.

Principales équations du modèle

La description du champ de contraintes repose sur l'hypothèse fondamentale de l'existence de deux fonctions notées $C(z)$ et $A(z)$ telles que

$$\begin{aligned}\sigma_{rz}^f(r, z) &= \left(\frac{1 - V_f}{R_f^2} \right) C'(z) r, \quad \sigma_r^f(r, z) = \sigma_\theta^f(r, z), \\ \sigma_{rz}^m(r, z) &= \left(\frac{R_f^2}{r} - V_f r \right) \frac{C'(z)}{R_f^2}, \quad \sigma_r^m(r, z) = \sigma_\theta^m + \frac{A(z)}{r^2}.\end{aligned}\tag{A-1}$$

Pour commencer, Mc Cartney montre que la fonction $A(z)$ peut être approchée par

$$A(z) = -2\Phi - 4\frac{k_2}{k_1}C(z) + k_3 R_f^2 C''(z),\tag{A-2}$$

où $\Phi = \Phi(\varepsilon^\infty, \Delta T)$ est exprimé à partir de la déformation axiale ε^∞ dans la partie saine loin de la zone endommagée et de la variation de température après élaboration ΔT . Les coefficients k_1 , k_2 et k_3 sont écrits en fonction des propriétés thermo-élastiques des constituants fibre et matrice.

Ensuite, la fonction $C(z)$ s'obtient en résolvant les relations issues des équations d'équilibre, des équations d'élasticité et des conditions aux limites. Les deux régions du microcomposite constituées d'une part de l'interface avec glissement frottant $\left(0 \leq z \leq \frac{d}{2}\right)$ et d'autre part de l'interface parfaite $\left(\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}\right)$ sont considérées séparément. On aboutit à une équation différentielle du troisième ordre. Pour le premier bloc, Mc Cartney montre que la solution est

$$\begin{aligned}C(z) &= \left(\frac{k_1}{2k_2} \Phi + C_0 \right) \left\{ \cosh \frac{kz}{R_f} + \frac{a_2}{k} \sinh \frac{kz}{R_f} \right\} e^{-\frac{a_2 z}{R_f}} - \frac{k_1}{2k_2} \Phi \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \text{avec } C_0 &= -\frac{R_f^2 \sigma_z^{m, \max}}{2V_f} \quad \text{et} \quad k = (a_2^2 + b_2^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{A-3}$$

Les coefficients a_2 et b_2 dépendent des propriétés de la fibre et de la matrice, ainsi que du coefficient de frottement μ . Leur expression est donnée en fonction des conditions aux limites. L'expression résolue de $C(z)$ pour la deuxième région donne

$$C(z) = \left\{ A \cosh \frac{qz}{R_f} + \frac{B}{q} \sinh \frac{qz}{R_f} \right\} e^{-\frac{pz}{R_f}} \quad \frac{d}{2} \leq y \leq \frac{L}{2},\tag{A-4}$$

où les coefficients p et q sont écrits à partir des propriétés thermo-élastiques des constituants fibre et matrice. Les fonctions A et B dépendent en plus de ε^∞ .

D'autre par, Mc Cartney fournit aussi une expression du déplacement axial moyen de la fibre et de la matrice à partir de la moyenne de $C(z)$ le long du microcomposite telle que $\bar{C}(z) = \int_z^{\frac{L}{2}} C(z) dz$. L'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma, d)$ peut alors être évaluée en fonction de la contrainte appliquée σ et de la longueur de décohésion d .

Ces relations ont été déterminées et résolues numériquement à l'aide de Matlab.

Champ de contraintes

Les expressions de Mc Cartney ont été utilisées pour évaluer la répartition des contraintes axiales, radiales et le cisaillement le long de la fibre (coordonnée z). Le microcomposite considéré est constitué d'une décohésion de longueur $d = 3R_f$ avec un rayon de fibre $R_f = 7 \mu m$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$. Un chargement de traction est appliqué. Les caractéristiques du volume élémentaire fibre/matrice sont données dans le [tableau A-1](#).

V_f	0,5	E_m	400 GPa	ν_m	0,2	α_m	$4,6.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	ΔT	-1000°C
R_f	$7 \mu m$	E_f	200 GPa	ν_f	0,2	α_f	$2,9.10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$		

Tableau A-1 – Propriétés des constituants du microcomposite étudié (fraction volumique de fibre V_f , rayons R_m et R_f , modules d'Young E_m et E_f , coefficients de Poisson ν_m et ν_f , coefficients de dilatation α_m et α_f respectivement de la matrice et de la fibre, variation de température après élaboration ΔT).

On s'intéresse d'abord à la répartition des contraintes axiales σ_z^f et σ_z^m supportées par la fibre et la matrice en fonction de la coordonnée z le long de la fibre ([figure A-1](#)). La décohésion est présente pour $(z \leq d/2)$. Les valeurs des contraintes sont calculées à l'interface ($r = R_f$).

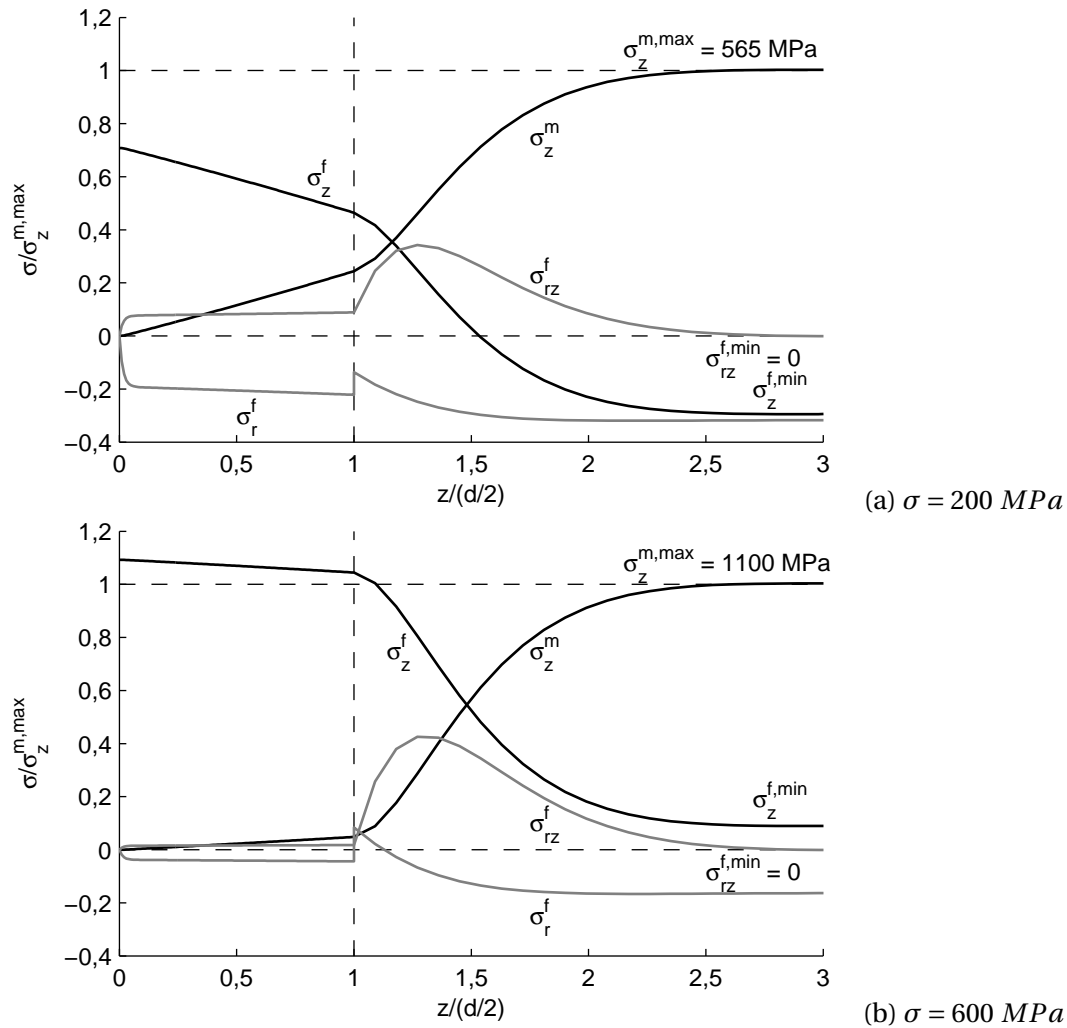


Figure A-1 – Répartition des contraintes interfaciales obtenues analytiquement avec le modèle de [Mc Cartney, 1989] pour une longueur de décohésion $d = 3R_f$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,4$. La contrainte axiale appliquée sur le microcomposite est $\sigma = 200 \text{ MPa}$ (a) et $\sigma = 600 \text{ MPa}$ (b). Les valeurs de la contrainte axiale de la fibre et de la matrice σ_z^f et σ_z^m , de la contrainte radiale à l'interface $\sigma_r^f(R_f, z)$ et du cisaillement interfacial $\sigma_{rz}^f(R_f, z)$ sont normalisées par rapport à la contrainte axiale $\sigma_z^{m,max}$ dans la matrice loin de la fissure.

Les efforts sont transférés de la matrice vers la fibre dans la zone fissurée et au voisinage du front de décohésion. Au delà de trois rayons de fibre après la pointe de décohésion, les contraintes axiales à l'interface retrouvent les valeurs $\sigma_z^{m,max}$ et $\sigma_z^{f,min}$ des contraintes axiales dans la matrice et la fibre loin de la fissure.

Le cisaillement interfacial $\sigma_{rz}^f(R_f, z)$ pour $\left(0 \leq \frac{z}{d/2} \leq 1\right)$ dépend du coefficient de frottement μ et de la contrainte radiale à l'interface $\sigma_r^f(R_f, z)$. La condition de glissement frottant de type Coulomb est satisfaite avec

$$\sigma_{rz}^f\left(R_f, z < \frac{d}{2}\right) = -\mu \sigma_r^f\left(R_f, z < \frac{d}{2}\right). \quad (A-5)$$

Loin de la zone d'influence de la fissure, le cisaillement à l'interface est nul.

La [figure A-2](#) montre l'évolution des contraintes pour une contrainte appliquée croissante $\sigma = [200 \text{ MPa}; 600 \text{ MPa}; 1000 \text{ MPa}]$. En présence des contraintes résiduelles, la contrainte axiale supportée par la fibre est négative dans la zone saine du microcomposite pour les faibles chargements (b). Le contact est créé avec frottement ($\mu = 0,4$) ce qui est à l'origine du cisaillement interfacial dans la zone de glissement ([figure A-2c](#)). Les contraintes radiales σ_r^f sont décroissantes avec le chargement (d). Le cisaillement interfacial devient aussi plus faible dans la zone de glissement (c).

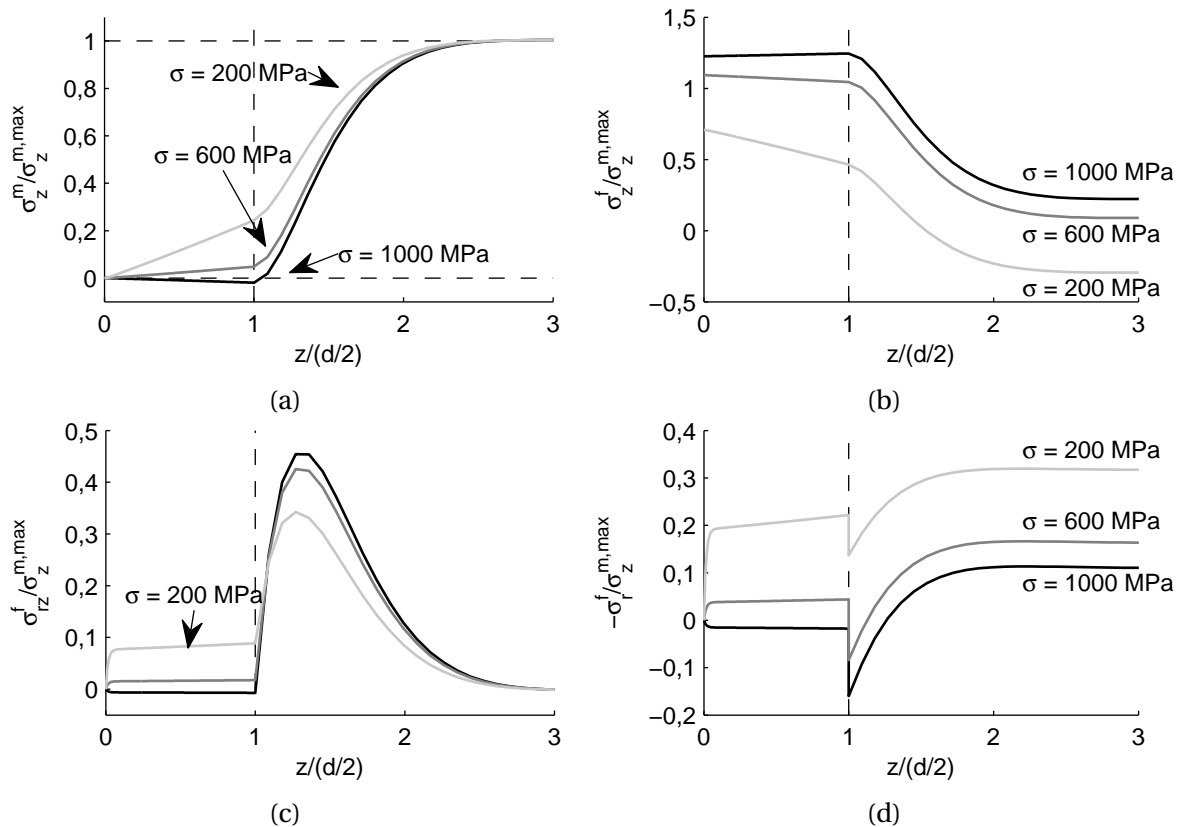


Figure A-2 – Contraintes le long de l'axe z , obtenues analytiquement, en fonction du chargement appliqué ε , pour une longueur de décohésion $d = 3R_f$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,4$. (a) contrainte axiale de la matrice σ_z^m le long de l'axe z , (b) contrainte axiale de la fibre σ_z^f le long de l'axe z , (c) cisaillement interfacial $\sigma_{rz}(R_f, z)$ (d) contrainte radiale à l'interface $\sigma_r(R_f, z)$.

Les valeurs des contraintes modélisées ont ensuite été comparées au résultat des calculs Eléments Finis (EF).

Comparaison avec les calculs Eléments Finis

Le profil de déchargement de la matrice est calculé par EF à partir d'une cellule élémentaire axisymétrique en traction. Le contact frottant est modélisé le long de la décohésion de longueur $d = 3R_f$. L'évolution de la contrainte axiale σ_z^m en fonction de z est déterminée pour plusieurs valeurs de la distance r (figure A-3). Ces valeurs sont comparées au modèle de Mc Cartney en estimant la contrainte axiale de la matrice à l'interface pour $r = R_f$ (figure A-4).

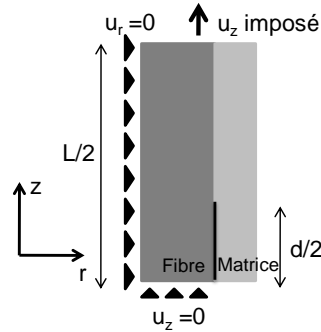


Figure A-3 – Cellule élémentaire 2D axisymétrique du microcomposité endommagé de longueur L et conditions aux limites en traction. L'interface est frottante le long de la décohésion de longueur d .

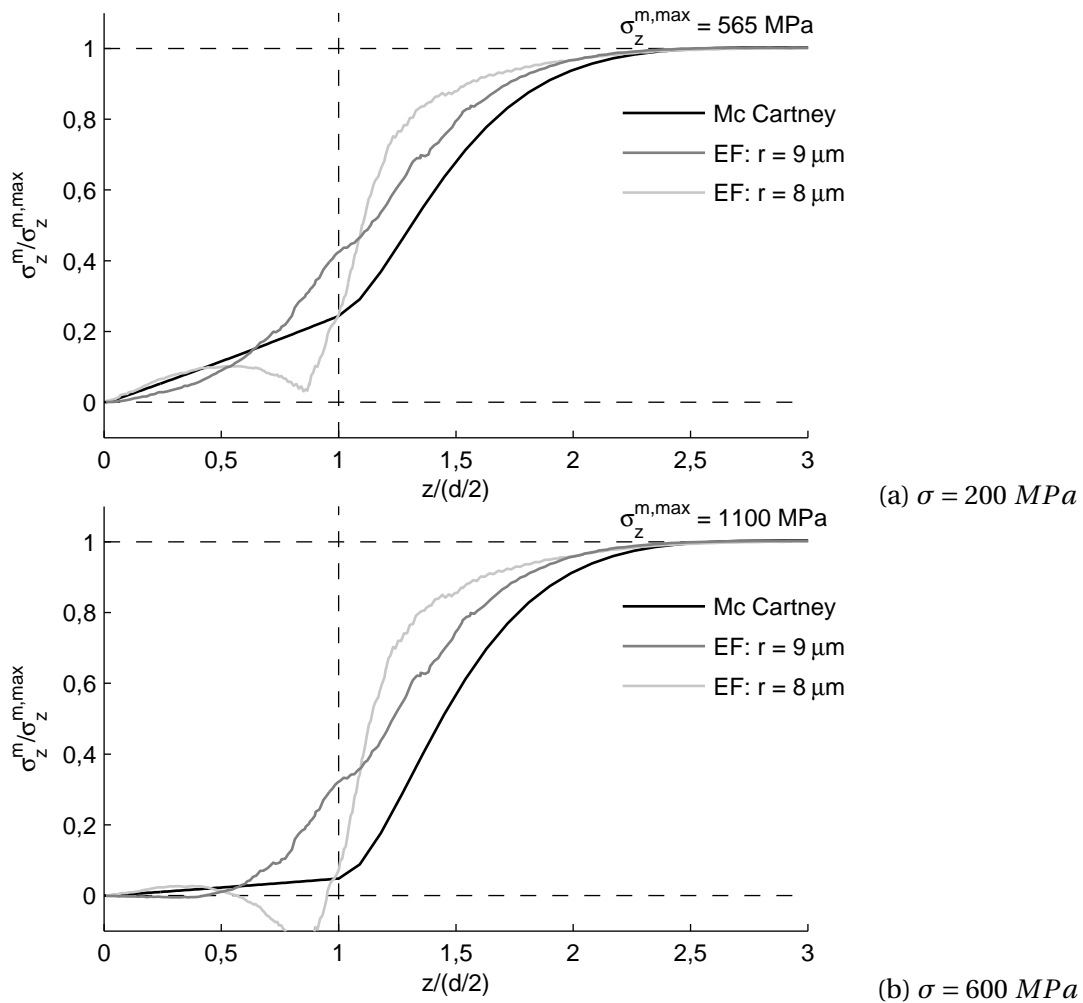


Figure A-4 – Evolution de la contrainte axiale dans la matrice σ_z^m à l'interface obtenue analytiquement avec le modèle de [Mc Cartney, 1989] pour une longueur de décohésion $d = 3R_f$ et un coefficient de frottement $\mu = 0,4$. Ces valeurs sont comparées avec la contrainte axiale le long du microcomposité (z) calculée par EF, pour deux valeurs de la distance r . La contrainte appliquée sur le microcomposité est $\sigma = 200 \text{ MPa}$ (a) et $\sigma = 600 \text{ MPa}$ (b). Les valeurs sont normalisées par rapport à la contrainte axiale $\sigma_z^{m,max}$ dans la matrice loin de la fissure.

Le modèle de Mc Cartney permet de bien approcher le déchargement de la contrainte dans la matrice en présence d'une interface frottante, avant et après le front de décohésion. On retrouve le profil de déchargement en Ω faisant apparaître une première partie linéaire pour le déchargement dans la zone de la décohésion et une deuxième partie parabolique.

Modélisation de l'ouverture de la fissure matricielle

L'ouverture de la fissure matricielle dépend surtout du chargement de traction et de la longueur de décohésion. Au cours du chapitre 2, une loi d'évolution de l'ouverture de fissure $\Delta U(\sigma, d)$ a été proposée en fonction de la contrainte appliquée σ et de la longueur de décohésion d . Deux coefficients sont nécessaires et sont facilement identifiés à l'aide de calculs EF. Plusieurs mécanismes d'endommagement au sein du microcomposite ont été étudiés successivement :

1. la fissure matricielle seule (section II.3 page 46),
2. la fissure matricielle avec décohésion interfaciale et glissement libre (section III.3 page 63)
3. la prise en compte du glissement frottant à l'interface (section IV page 91). Le modèle de Mc Cartney s'inscrit dans ce cadre d'étude.

On souhaite aussi comparer l'ouverture de la fissure matricielle obtenue avec le modèle de Mc Cartney avec les résultats numériques à partir du modèle de zones cohésives (section IV page 91). Cette ouverture de fissure ΔU a été modélisée au cours de la réponse en traction du microcomposite soumis à l'amorçage d'une fissure matricielle et à la propagation de la décohésion interfaciale avec frottement (figure A-5a). La longueur de décohésion est linéaire en fonction de la contrainte appliquée σ et dépend de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et du coefficient de frottement μ (figure A-5b).

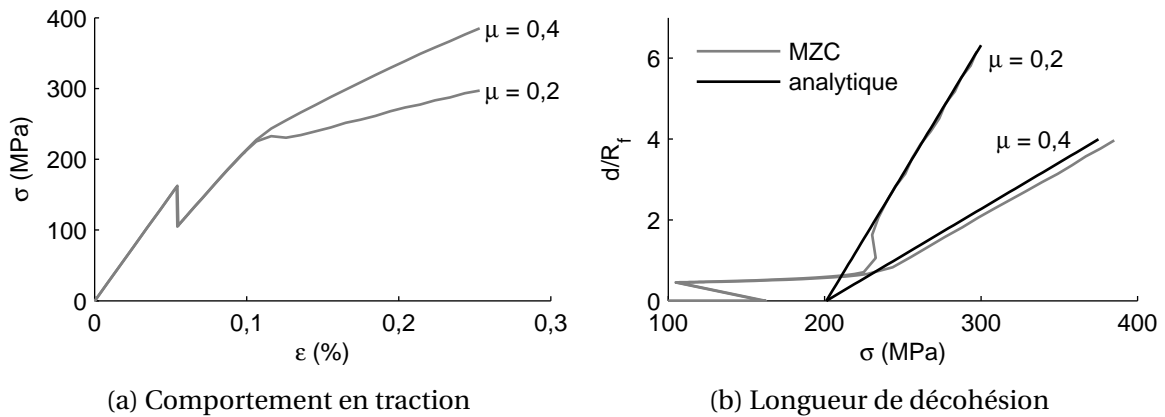


Figure A-5 – (a) Simulation du comportement en traction de la cellule de longueur $L = 100 \mu m$ au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale. Le modèle de zones cohésives est utilisé. (b) Evolution de la longueur de décohésion en fonction de la contrainte appliquée σ . Les contraintes résiduelles ont été prises en compte et sont induites par une variation de température $\Delta T = -1000^\circ C$ après élaboration. Le frottement est paramétré par le coefficient de frottement μ . La contrainte à rupture de la matrice est $\sigma_{max} = 500 MPa$. L'énergie de rupture de la matrice $G_m^c = 3 J.m^{-2}$ et de l'interface $G_i^c = 4 J.m^{-2}$.

L'amorçage de la fissure matricielle pour $\sigma \approx 150 MPa$ implique une petite ouverture de fissure (figure A-5). On observe ensuite une chute de contrainte avant que la décohésion commence à se propager pour une contrainte appliquée $\sigma \approx 200 MPa$. La longueur de décohésion augmente l'ouverture de la fissure.

On observe que le modèle de Mc Cartney donne une bonne approximation de l'ouverture de fissure (figure A-6). Ces valeurs sont déterminées à partir de la contrainte appliquée σ , de la longueur de décohérence d estimée préalablement (figure A-5b) et du coefficient de frottement μ .

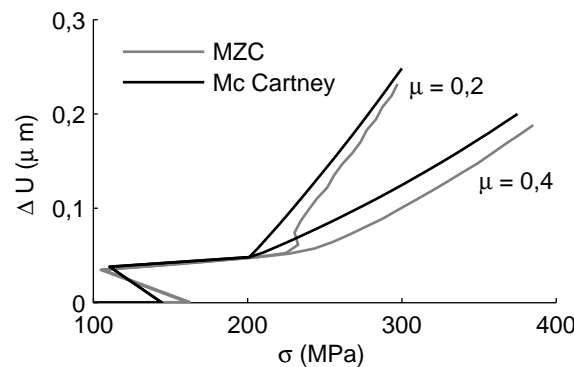


Figure A-6 – Ouverture de la fissuration matricielle calculée à l'aide du MZC d'une part et du modèle de Mc Cartney d'autre part. L'ouverture de fissure est croissante au cours de l'essai de traction et dépend de la longueur de décohérence (figure A-5).

Conclusion

Ce modèle fournit une description réaliste des contraintes autour de la décohérence interfaciale. Dans l'objectif de décrire l'évolution de la longueur de décohérence et de la densité de fissuration matricielle, la connaissance du champ de contrainte local pourrait être envisagé pour résoudre deux points :

1. Evaluation de la longueur de décohérence au cours de la traction et avec frottement :
le taux de restitution d'énergie lors de la propagation de la décohérence pourrait être déterminé en fonction du champ de contrainte et du déplacement local.
2. Saturation de la fissuration matricielle :
la fissure matricielle peut être créée à condition que la contrainte dans la matrice atteigne la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} . La présence de la décohérence modifie la contrainte supportée par la matrice et peut empêcher l'amorçage de la nouvelle fissure matricielle. Cet effet d'écran entraîne la saturation de la fissure matricielle et la connaissance du profil de déchargement de la matrice est nécessaire pour le modéliser correctement. Le modèle du minicomposite en traction (chapitre 3) utilise les équations de Mc Cartney pour déterminer l'effet d'écran.
On suppose alors que la contrainte axiale dans la matrice est homogène dans toute la section de matrice, soit $\sigma_z^m(r, z) = \sigma_z^m(z) \forall r \in [R_f; R_m]$.

Enfin le modèle analytique de Mc Cartney permet aussi une bonne approximation de l'ouverture de la fissure matricielle.

Bibliographie

- MC CARTNEY, L. N. 1989, «New theoretical model of stress transfert between fiber and matrix in a uniaxially fiber-reinforced composite», *Proc. Royal Soc. London A*, vol. 425, p. 215–244.
- SMITH, G. E. et A. J. M. SPENCER. 1970, «Interfacial tractions in a fibre-reinforced elastic composite material», *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 18, p. 81–100.

Annexe B

Modélisation des mécanismes de fissuration matricielle : Mécanique de la rupture incrémentale

L'amorçage de la fissure matricielle au sein du microcomposite sollicité en traction uniaxiale est analysé par une approche énergétique basée sur la mécanique de la rupture incrémentale. **On souhaite déterminer le chargement appliqué qui amorce la fissure matricielle en fonction de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c .** Une analyse de la nucléation de la fissure matricielle est proposée à partir d'un bilan d'énergie. On obtient ainsi une expression semi-analytique du chargement critique.

Cette approche énergétique nécessite d'exprimer l'**énergie élastique du microcomposite fissuré en traction. Cette expression sera utilisée à la fois pour l'analyse de la fissure matricielle et de la décohésion interfaciale du microcomposite en traction (chapitre 2, section III.1, page 50).** D'autre part, un Modèle de Zones Cohésives (MZC) a été développé pour simuler l'amorçage de la fissure matricielle au sein d'une cellule élémentaire du microcomposite (chapitre 2, section II.2, page 39). L'amorçage de la fissure est pilotée par la contrainte à rupture de la matrice σ_{max} . La propagation dépend de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c . Une comparaison entre les deux approches est présentée.

Les caractéristiques du microcomposite étudié sont données par le [tableau 1.1](#) page 32. Les contraintes résiduelles sont prises en compte par une variation de température ΔT et les coefficients de dilatation du microcomposite. On considère une cellule élémentaire du microcomposite de taille L contenant une fissure matricielle ([figure 1.1](#)). Le module élastique $E(L)$ ([1.5](#) page 34) et le coefficient de dilatation $\alpha(L)$ ([1.15](#) page 37) du microcomposite en fonction du pas de fissuration L sont utilisés pour établir le bilan d'énergie.

Il est utile d'étudier en premier l'amorçage de la fissure matricielle sans prendre en compte les contraintes résiduelles. Les points abordés sont :

1. Amorçage de la fissure matricielle sans contraintes résiduelles :
 - Bilan d'énergie,
 - Comparaison entre amorçage de la fissure à déformation ou contrainte imposée,
 - Comparaison avec le MZC.
2. Amorçage de la fissure matricielle avec les contraintes résiduelles :
 - Energie élastique du microcomposite,
 - Bilan d'énergie,
 - Comparaison entre amorçage de la fissure à déformation ou contrainte imposée,
 - Comparaison avec le MZC.
3. Influence de la section de matrice et des contraintes résiduelles sur le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle.

Amorçage de la fissure matricielle sans contraintes résiduelles

Un chargement en déformation imposée est appliqué parallèlement à l'axe de la fibre du microcomposite afin de générer une fissure matricielle annulaire ([figure 1.1](#)). On souhaite déterminer la déformation critique qui occasionne l'amorçage de la fissure. L'interface fibre/matrice est supposée parfaite.

Bilan d'énergie

Le bilan énergétique de ce mécanisme de rupture s'écrit

$$-\Delta W = W_0 - W, \quad (\text{B-1})$$

où W_0 et W sont les énergies élastiques du microcomposite non fissuré et fissuré qui dépendent du chargement appliqué. On note $\Delta S = \pi(R_m^2 - R_f^2)$ la surface créée lors de la fissuration matricielle.

La condition nécessaire pour la création de la fissure matricielle s'exprime en fonction de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c par

$$-\Delta W \geq G_m^c \Delta S_m. \quad (\text{B-2})$$

Cette relation (B-2) s'écrit $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} \geq G_m^c$ de façon analogue au critère de Griffith mais fait intervenir des incréments finis et non infinitésimaux d'énergie et de surface fissurée. En notant que

$$W_0 = \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E_0 \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E(L) \varepsilon^2, \quad (\text{B-3})$$

où ε est la déformation imposée, cette condition énergétique incrémentale devient

$$\frac{1}{2} L \pi R_m^2 (E_0 - E(L)) \varepsilon^2 \geq G_m^c \pi (R_m^2 - R_f^2). \quad (\text{B-4})$$

Après avoir rappelé l'expression du module $E(L)$ (1.5), le bilan énergétique s'écrit

$$\frac{1}{2} \pi R_m^2 E_0 D_1^0 R_f \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}\right)^{-1} \varepsilon^2 \geq G_m^c \pi (R_m^2 - R_f^2). \quad (\text{B-5})$$

En considérant que toute l'énergie $-\Delta W$ est absorbée par la création de fissure, le critère d'amorçage de la fissure matricielle s'écrit $-\Delta W = G_m^c \Delta S_m$ et permet de déterminer la déformation longitudinale ε^c appliquée à l'amorçage de la fissure. On obtient l'expression

$$\varepsilon^c(L) = \sqrt{\frac{2G_m^c(1-V_f)}{E_0 D_1^0 R_f} \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}\right)}. \quad (\text{B-6})$$

L'amorçage de la fissure matricielle a lieu lorsque la contrainte appliquée atteint la valeur critique $\sigma^c = E_0 \varepsilon^c$ ce qui permet d'écrire

$$\sigma^c = \overline{\sigma^c} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \overline{\sigma^c} = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1-V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (\text{B-7})$$

La contrainte critique à l'amorçage de la fissure s'exprime en fonction des propriétés élastiques des deux constituants, de la fraction volumique de fibre V_f , du coefficient D_1^0 (figure 1.5) et de la longueur de la cellule L .

Comparaison entre amorçage de la fissure à déformation ou contrainte imposée

L'amorçage de la fissure matricielle, modélisée à déformation imposée, intervient lorsque la contrainte appliquée atteint σ^c (équation B-7) et implique une chute de contrainte après la création de la fissure telle qu'illustrée par la figure B-1a.

La contrainte appliquée obtenue après l'amorçage de la fissure peut s'exprimer par $\sigma^{chute} = E(L)\varepsilon^c$ soit

$$\sigma^{chute} = \frac{\overline{\sigma^c}}{\sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}}} . \quad (B-8)$$

Cette chute de contrainte dépend alors du terme positif $D_1^0 \frac{R_f}{L}$ qui croît avec la densité de fissuration $1/L$. L'estimation de cette chute de contrainte pour les pas de fissurations observés expérimentalement montre qu'elle est faible, voire négligeable pour les faibles densités de fissuration. Dans ce cas $\sigma^c \approx \sigma^{chute} \approx \overline{\sigma^c}$.

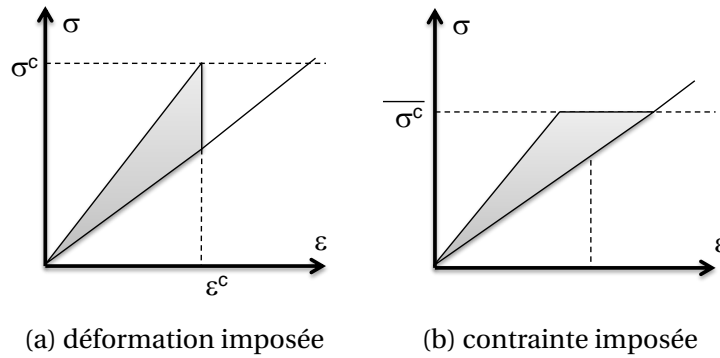


Figure B-1 – Evaluation de l'énergie mise en jeu lors de l'amorçage de la fissure matricielle qui se réalise pour un chargement imposé en déformation (a) ou en contrainte (b). A déformation imposée (a), le chargement qui permet d'amorcer la fissure est noté ε^c (équation B-6) et la contrainte appliquée à l'amorçage est σ^c (équation B-7). Puis l'amorçage de la fissure implique une chute de contrainte. Si on considère l'amorçage de la fissure obtenue à contrainte imposée (b), la contrainte critique à l'amorçage est notée $\overline{\sigma^c}$ exprimée par l'équation B-12. La création de la fissure implique une augmentation de déformation liée à l'ouverture de la fissure matricielle.

A contrainte imposée, la condition nécessaire pour la création de la fissure (B-2) s'écrit alors

$$\frac{\Delta(W_{ext} - W)}{\Delta S_m} \geq G_m^c , \quad (B-9)$$

où W représente l'énergie élastique de la cellule et W_{ext} le travail des forces extérieures imposées qui est non nul. On peut exprimer $W_{ext} - W$ en fonction de la contrainte axiale imposée σ par

$$W_{ext} - W = L\pi R_m^2 \frac{\sigma^2}{E} - \frac{1}{2} L\pi R_m^2 \frac{\sigma^2}{E} \quad \text{donc} \quad W_{ext} - W = \frac{1}{2} L\pi R_m^2 \frac{\sigma^2}{E} . \quad (B-10)$$

En suivant le même raisonnement que précédemment mais pour un chargement à contrainte imposée, la contrainte appliquée σ^c qui autorise la création de la fissure matricielle est obtenue par la condition

$$\frac{1}{2} L\pi R_m^2 \sigma^2 \left(\frac{1}{E(L)} - \frac{1}{E_0} \right) = G_m^c \pi (R_m^2 - R_f^2) , \quad (B-11)$$

ce qui permet d'écrire

$$\sigma^c = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}} \quad \text{soit} \quad \sigma^c = \overline{\sigma^c}. \quad (\text{B-12})$$

On peut donc considérer que la modélisation de l'amorçage de la fissure à déformation ou à contrainte imposée **donne des résultats équivalents**.

On souhaite maintenant comparer la condition d'amorçage de la fissure matricielle (B-7) avec les résultats du modèle de zones cohésives.

Comparaison de la contrainte à l'amorçage de la fissure avec l'approche analytique

Parmi les hypothèses formulées pour établir le modèle analytique, il a été supposé que la fissure matricielle s'amorce et se propage instantanément dans toute la section de la matrice. La condition nécessaire pour créer la fissure est donnée par la relation (B-2)

$$-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} \geq G_m^c. \quad (\text{B-13})$$

La contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle σ^c a été exprimée en considérant que toute l'énergie $-\Delta W$ est absorbée par la création de la fissure soit $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$ (B-7) par

$$\sigma^c = \overline{\sigma^c} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \overline{\sigma^c} = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (\text{B-14})$$

Le modèle de zones cohésives quant à lui nécessite un critère en contrainte et en énergie (σ_{max} , G_m^c). Pour comparer l'amorçage de la fissure matricielle avec les deux modèles, on s'intéresse d'abord à la contrainte axiale maximale σ_{max} supportée par la matrice. σ_{max} peut s'écrire en utilisant la relation 1.23 à partir de la contrainte σ^c appliquée à l'amorçage et du coefficient a_1 telle que

$$\sigma_{max} = \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sigma^c. \quad (\text{B-15})$$

On note σ_{max}^{limite} la contrainte maximale de la matrice à l'amorçage de la fissure matricielle telle que $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$. On pourra alors comparer l'amorçage obtenu avec le modèle analytique à partir de G_m^c avec les résultats du MZC en choisissant les deux critères (σ_{max}^{limite} , G_m^c). En utilisant (B-14) et (B-15), σ_{max}^{limite} se détermine en fonction de G_m^c par

$$\sigma_{max}^{limite} = \overline{\sigma^c} \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \overline{\sigma^c} = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (\text{B-16})$$

Le MZC paramétré à partir des deux critères (σ_{max}^{limite} , G_m^c) donne une même contrainte à l'amorçage σ^c que l'approche énergétique (figure B-2a). L'équation B-7 a été utilisée pour déterminer σ^c à l'amorçage en fonction de G_m^c pour le modèle analytique. La fissure matricielle simulée par le MZC est créée dans toute la matrice dès l'amorçage de la fissure conformément aux hypothèses du modèle analytique.

La figure B-2b illustre la relation entre la contrainte maximale σ_{max}^{limite} et l'énergie de rupture de la matrice G_m^c telle que $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$. Le bilan d'énergie $-\Delta W$ dépend de la contrainte

appliquée σ^c à l'amorçage de la fissure. Si l'énergie de rupture est plus faible alors la condition pour créer la fissure matricielle est satisfaite puisque $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} \geq G_m^c$. En revanche si l'énergie de rupture est strictement plus élevée alors la relation devient $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} < G_m^c$ et la fissure ne se propage pas dans toute la section de la matrice. Il est alors nécessaire d'accroître le chargement de traction pour propager la fissure. On en déduit que la fissure matricielle se propage instantanément dans toute la section de matrice si $\sigma_{max} \geq \sigma_{max}^{limite}$, soit si

$$\sigma_{max} \geq \bar{\sigma}^c \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}^c = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (B-17)$$

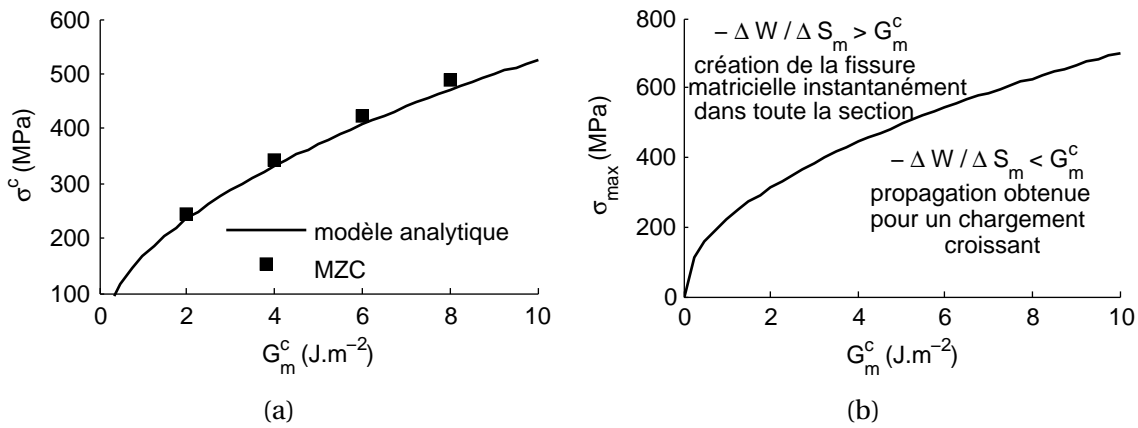


Figure B-2 – (a) Contrainte appliquée à l'amorçage de la fissure matricielle σ^c déterminée en fonction de G_m^c par l'approche analytique d'une part (B-7) et par le modèle de zones cohésives d'autre part. Pour que la condition $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$ soit satisfaite, la contrainte maximale de la matrice nécessaire pour le MZC est donnée par σ_{max}^{limite} (B-16). (b) Valeur du critère en contrainte σ_{max} pour le modèle de zones cohésives déterminé en fonction de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c si on souhaite que la relation $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$ soit respectée. Sous cette condition, $\sigma_{max} = \sigma_{max}^{limite}$ (B-16) et l'amorçage de la fissure est instantané dans toute la section de matrice. Ces calculs ont été réalisés pour une fraction volumique de fibre $V_f = 0,5$ et un pas de fissuration $L = 100 \mu m$.

Amorçage de la fissure matricielle avec les contraintes résiduelles

Le microcomposite est désormais soumis à la fois au chargement de traction mais aussi à la variation de température après élaboration ΔT . Sous l'effet du chargement thermique, le microcomposite subit une déformation axiale $\varepsilon_{th} = \alpha(L)\Delta T$ (figure B-3b). Le chargement mécanique imposé est noté ε_{meca} . Le chargement total imposé au cours des calculs EF s'écrit alors (figure B-3c)

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_{meca} + \alpha(L)\Delta T, \quad (B-18)$$

où $\alpha(L)$ est le coefficient de dilatation du microcomposite endommagé (1.15).

On souhaite déterminer le chargement critique ε^c qui est à l'origine de l'amorçage de la fissure matricielle dans la cellule représentative du microcomposite de taille L . On propose d'établir un bilan énergétique comme précédemment

$$-\Delta W = G_m^c \Delta S_m \quad \text{avec} \quad \Delta W = W - W_0 \quad \text{et} \quad \Delta S_m = \pi (R_m^2 - R_f^2), \quad (B-19)$$

où W et W_0 sont les énergies élastiques du microcomposite endommagé et sain soumis à la fois au chargement mécanique et thermique.

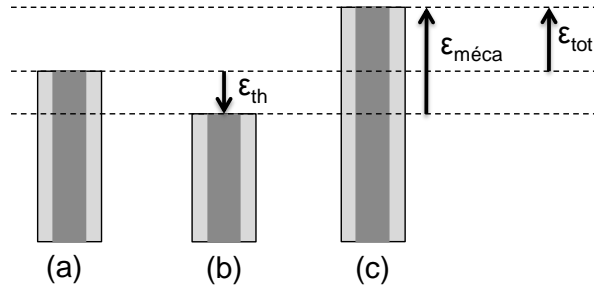


Figure B-3 – Déformation axiale de la cellule élémentaire du microcomposite endommagé soumis à la fois au chargement mécanique et thermique. (a) La variation de température après élaboration ΔT engendre une dilatation thermique $\epsilon_{th} = \alpha \Delta T$. (b) La déformation totale imposée ϵ_{tot} à la cellule est la somme de la dilatation thermique ϵ_{th} et du chargement mécanique $\epsilon_{méca}$.

Energie élastique du microcomposite

On suppose que l'on peut écrire l'énergie élastique $W_{th,0}$ du microcomposite sain après élaboration (figure 1.8a) sous la forme

$$W_{th,0} = \beta \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E_0 (\alpha_0 \Delta T)^2, \quad (B-20)$$

où β est un coefficient à déterminer. Les calculs EF ont permis de montrer que la valeur de β peut être approchée par

$$\beta = -\frac{\Delta \alpha_z^T}{\alpha_0}, \quad (B-21)$$

où la différence de coefficients de dilatation $\Delta \alpha_z^T$ est définie par la relation 1.12. L'expression de $W_{th,0}$ devient

$$W_{th,0} = -\frac{1}{2} \pi L R_m^2 \sigma^T \alpha_0 \Delta T \quad \text{avec} \quad \sigma^T = E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T. \quad (B-22)$$

De même, l'énergie élastique W_{th} du microcomposite endommagé soumis au refroidissement ΔT s'exprime sous la forme

$$W_{th} = -\frac{1}{2} \pi L R_m^2 \sigma^T \alpha(L) \Delta T. \quad (B-23)$$

La variation d'énergie élastique liée uniquement au chargement thermique devient alors

$$-\Delta W_{th} = -\frac{1}{2} \pi L R_m^2 E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T (\alpha_0 - \alpha(L)) \Delta T. \quad (B-24)$$

L'énergie élastique du microcomposite sain et endommagé soumis à la fois au chargement thermique et mécanique s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E_0 (\epsilon_{tot} - \alpha_0 \Delta T)^2 + W_{th,0} \quad \text{et} \\ W &= \frac{1}{2} \pi L R_m^2 E(L) (\epsilon_{tot} - \alpha(L) \Delta T)^2 + W_{th}. \end{aligned}} \quad (B-25)$$

Bilan d'énergie

On en déduit l'expression du bilan d'énergie $-\Delta W$ à l'aide du module longitudinal E et du coefficient de dilatation axial α

$$-\Delta W = \frac{1}{2} L \pi R_m^2 \{ (\epsilon_{tot} - \alpha_0 \Delta T)^2 E_0 - (\epsilon_{tot} - \alpha(L) \Delta T)^2 E(L) - E_0 \Delta \alpha_z^T (\alpha_0 - \alpha(L)) \Delta T^2 \}. \quad (B-26)$$

Cette équation se simplifie très fortement en utilisant les expressions du module $E(L)$ (équation 1.5) et du coefficient de dilatation $\alpha(L)$ (équation 1.15). De plus le chargement appliqué ε se détermine en déduisant de ε_{tot} la dilatation thermique du microcomposite sain, soit $\varepsilon = \varepsilon_{tot} - \alpha_0 \Delta T$. Le bilan d'énergie devient

$$-\Delta W = \frac{1}{2} \pi R_m^2 E_0 D_1^0 R_f \left(1 + \frac{D_1^0 R_f}{L} \right)^{-1} (\varepsilon + \Delta \alpha_z^T \Delta T)^2 \quad (B-27)$$

Si les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte ($\Delta T = 0$), on retrouve bien l'expression du bilan d'énergie B-5. Ce bilan d'énergie $-\Delta W$ a été comparé aux résultats obtenus par EF (figure B-4). Il est écrit en fonction du coefficient D_1^0 identifié préalablement (figure 1.5) et qui dépend du type de conditions aux limites. On obtient une bonne corrélation entre l'expression proposée et les résultats obtenus par EF.

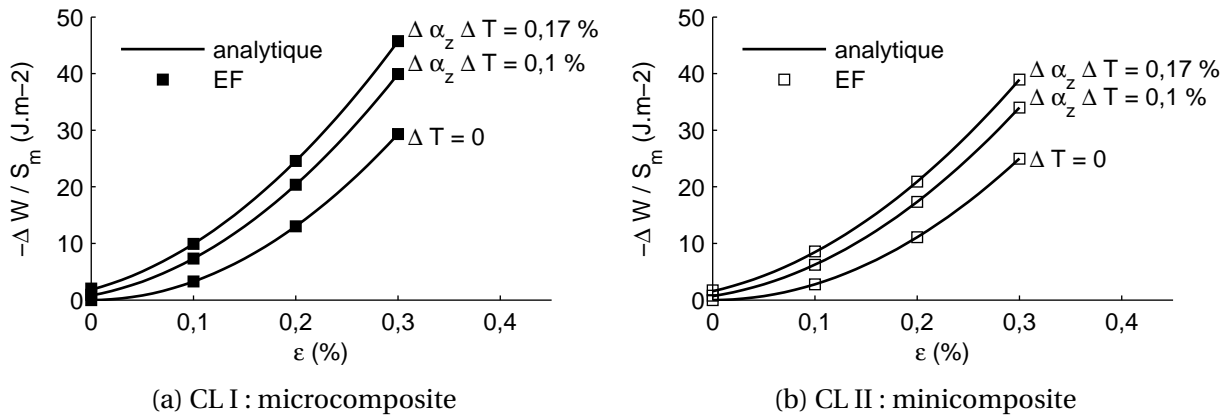


Figure B-4 – Taux de restitution d'énergie $\frac{-\Delta W}{\Delta S_m}$ déterminé par EF et comparé avec l'expression B-27 en fonction de la déformation appliquée ε . Les deux types de conditions aux limites (CL) ont été étudiés (figure 1.1). Les contraintes résiduelles axiales sont paramétrées par la déformation $\Delta \alpha_z^T \Delta T$ (relation 1.6).

La condition qui permet de déterminer la déformation longitudinale ε^c appliquée à l'amorçage s'écrit

$$E_0 D_1^0 R_f \left(1 + \frac{D_1^0 R_f}{L} \right)^{-1} (\varepsilon^c + \Delta \alpha_z^T \Delta T)^2 = 2(1 - V_f) G_m^c. \quad (B-28)$$

On en déduit l'expression du chargement critique ε^c

$$\varepsilon^c = \sqrt{\left(\frac{2G_m^c(1 - V_f)}{E_0 D_1^0 R_f} \right) \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L} \right)} - \varepsilon^T \quad \text{avec} \quad \varepsilon^T = \Delta \alpha_z^T \Delta T. \quad (B-29)$$

Sans contrainte résiduelle ($\varepsilon^T = 0$), on retrouve bien l'expression de la déformation appliquée à l'amorçage de la fissure matricielle (B-7).

La contrainte $\sigma^c = E_0 \varepsilon^c$ à l'amorçage de la fissure matricielle s'exprime alors par

$$\sigma^c = \overline{\sigma^c} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} - \sigma^T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{\sigma^c} = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}} \\ \sigma^T = E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T \end{cases}. \quad (B-30)$$

Comparaison entre amorçage de la fissure à déformation ou contrainte imposée

L'amorçage de la fissure matricielle à déformation imposée intervient lorsque la contrainte appliquée atteint σ^c (B-30). A contrainte imposée, la condition nécessaire pour la création de la fissure (équation B-2) s'écrit

$$\frac{\Delta(W_{ext} - W)}{\Delta S_m} \geq G_m^c \quad (\text{B-31})$$

où W représente l'énergie élastique de la cellule et W_{ext} le travail des forces extérieures imposées qui est non nul. On peut exprimer $W_{ext} - W$ en fonction de la contrainte axiale imposée σ par

$$\begin{aligned} W_{ext} - W &= L\pi R_m^2 \left(\frac{\sigma^2}{E} + \sigma \alpha \Delta T \right) + 2W_{th} - \left(\frac{1}{2} L\pi R_m^2 \frac{\sigma^2}{E} + W_{th} \right) \\ \text{donc } W_{ext} - W &= \frac{1}{2} L\pi R_m^2 \left(\frac{\sigma^2}{E} + 2\sigma \alpha \Delta T \right) + W_{th} . \end{aligned} \quad (\text{B-32})$$

En suivant le même raisonnement que précédemment mais pour un chargement à contrainte imposée, la contrainte appliquée σ^c qui autorise la création de la fissure matricielle est obtenue par la condition

$$\frac{1}{2} L\pi R_m^2 \left\{ \sigma^2 \left(\frac{1}{E(L)} - \frac{1}{E_0} \right) + 2(\alpha(L) - \alpha_0) \Delta T \sigma \right\} - \Delta W_{th} = G_m^c \pi (R_m^2 - R_f^2) , \quad (\text{B-33})$$

ce qui, après simplification en utilisant à nouveau les expressions du module longitudinal $E(L)$ (équation 1.5), du coefficient de dilatation $\alpha(L)$ (équation 1.15) et de $-\Delta W_{th}$ (équation B-24), permet d'écrire

$$\sigma^c = \overline{\sigma^c} - \sigma^T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{\sigma^c} = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}} \\ \sigma^T = E_0 \Delta \alpha_z^T \Delta T \end{cases} . \quad (\text{B-34})$$

On peut donc considérer que la modélisation de l'amorçage de la fissure à déformation ou à contrainte imposée **donne des résultats équivalents**.

Comparaison de la contrainte à l'amorçage obtenue avec le modèle de zones cohésives

On souhaite comparer la contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle avec celle obtenue avec le modèle de zones cohésives en prenant en compte les contraintes résiduelles. Un raisonnement similaire à celui déjà employé lors de la comparaison précédente sans contraintes résiduelles est utilisé (figure B-2).

La contrainte critique σ^c qui amorce la fissure matricielle a été déterminée à partir de G_m^c (B-30) telle que la condition $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$ soit satisfaite. En utilisant la relation 1.13, la contrainte axiale maximale σ_{max} supportée par la matrice est reliée à la contrainte appliquée σ^c par

$$\sigma_{max} = \frac{1 - V_f a_1}{1 - V_f} (\sigma^c + \sigma^T) . \quad (\text{B-35})$$

La contrainte maximale σ_{max}^{limite} supportée par la matrice telle que $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$ s'écrit alors en fonction de l'énergie de rupture de la matrice G_m^c par

$$\sigma_{max}^{limite} = \bar{\sigma}^c \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}^c = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (B-36)$$

σ_{max}^{limite} ne dépend pas des contraintes résiduelles et on retrouve l'équation déjà obtenue (B-16).

La condition d'amorçage de la fissure matricielle est $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} \geq G_m^c$. Nous avons déterminé que cette condition est satisfaite lorsque la contrainte maximale $\sigma_{max} \geq \sigma_{max}^{limite}$ (figure B-2b). σ_{max}^{limite} constitue la limite en deçà de laquelle il est nécessaire d'accroître le chargement de traction pour propager la fissure matricielle. **La fissure matricielle se propage instantanément dans toute la section de matrice si $\sigma_{max} \geq \sigma_{max}^{limite}$, soit si**

$$\sigma_{max} \geq \bar{\sigma}^c \frac{1 - a_1 V_f}{1 - V_f} \sqrt{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}^c = \sqrt{\frac{2G_m^c E_0 (1 - V_f)}{D_1^0 R_f}}. \quad (B-37)$$

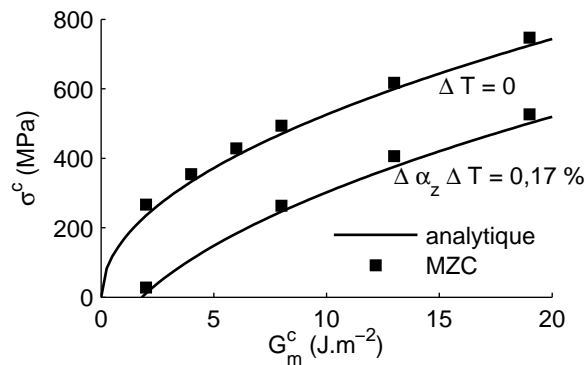


Figure B-5 – Contrainte appliquée à l'amorçage de la fissure matricielle σ^c déterminée en fonction de G_m^c par l'approche analytique d'une part (équation B-30) et par le modèle de zones cohésives d'autre part. Ces calculs ont été réalisés pour une fraction volumique de fibre $V_f = 0,5$ et un pas de fissuration $L = 100 \mu m$.

La figure B-5 représente la contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle σ^c en fonction de l'énergie de rupture G_m^c déterminée à partir des deux modèles en respectant la condition $-\frac{\Delta W}{\Delta S_m} = G_m^c$. Pour le MZC, les paramètres d'amorçage et de propagation sont $\sigma_{max} = \sigma_{max}^{limite}$ et G_m^c .

D'autre part l'équation B-30 a été utilisée pour déterminer la contrainte appliquée σ^c à l'amorçage de la fissure matricielle à partir de G_m^c pour le modèle analytique. La fissure matricielle simulée par le MZC est créée dans toute la matrice dès l'amorçage de la fissure conformément aux hypothèses du modèle analytique.

Influence de la section de matrice et des contraintes résiduelles sur le chargement à l'amorçage de la fissure matricielle

La contrainte σ^c à l'amorçage de la fissure matricielle a été exprimée en fonction de la fraction volumique de fibre V_f et des contraintes résiduelles (équation B-30). Les contraintes résiduelles favorisent l'amorçage de la fissure matricielle pour $\Delta\alpha_z < 0$ (figure B-6a).

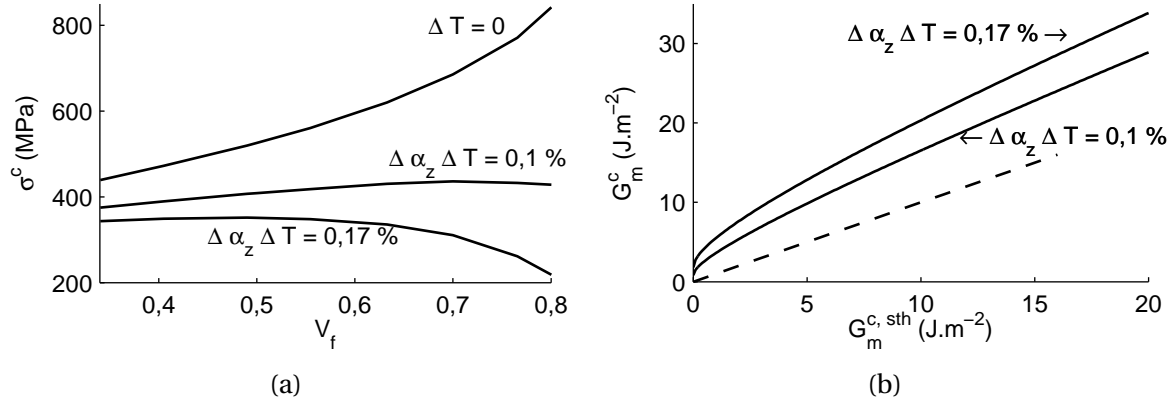


Figure B-6 – (a) Contrainte σ^c à l'amorçage de la fissure matricielle en fonction de la fraction volumique de fibre V_f et de la déformation $\Delta\alpha_z \Delta T$. L'énergie de rupture est $G_m^c = 10 \text{ J.m}^{-2}$. (b) Influence des contraintes résiduelles sur l'identification de l'énergie de rupture G_m^c pour $V_f = 0,5$. $G_m^{c,sth}$ correspond à l'énergie de rupture identifiée sans prendre en compte les contraintes résiduelles.

On confirme que l'amorçage de la fissure matricielle est plus précoce si la section de matrice est plus importante, en tout cas si les contraintes résiduelles sont faibles ($\Delta\alpha_z \Delta T < 0,1\%$). Ceci n'est plus vrai si les contraintes résiduelles sont suffisamment importantes (figure B-6a).

Dans la perspective d'identifier l'énergie de rupture G_m^c à partir de la connaissance de la contrainte à l'amorçage σ^c issue d'essais de traction expérimentaux, on peut se demander quelle est l'influence de la prise en compte ou non des contraintes résiduelles. On note $G_m^{c,sth}$ l'énergie de rupture évaluée sans prendre en compte les contraintes résiduelles. Dans ce cas $G_m^{c,sth}$ se calcule à partir de la contrainte à l'amorçage en utilisant l'expression (B-30) avec $\sigma^T = 0$.

La figure B-6b représente l'évolution de l'énergie de rupture G_m^c (évaluée en prenant en compte les contraintes résiduelles) en fonction de $G_m^{c,sth}$. Négliger les contraintes résiduelles entraîne la sous évaluation de l'énergie de rupture. G_m^c peut être au plus 1,5 fois plus élevé que la valeur $G_m^{c,sth}$ identifiée en fonction de l'importance de la déformation $\Delta\alpha_z \Delta T$.

Annexe C

Propagation de la décohésion avec frottement : Comparaison avec le modèle de rechargement linéaire

Dans le cadre du chapitre 3, la propagation de la décohésion interfaciale avec glissement frottant, au sein du minicomposite en traction, a été modélisée. Les contraintes résiduelles sont prises en compte ainsi que la loi de frottement de Coulomb. Le glissement frottant à l'interface fibre/matrice, paramétré par le coefficient de frottement μ , permet de ralentir la propagation de la décohésion.

Une loi de propagation de la décohésion $d(\sigma)$ est proposée (Eq. 2.9, p. 85).

Dans la littérature, le modèle de rechargement linéaire est le plus largement utilisé pour déterminer la propagation de la décohésion à l'aide des modèles micromécaniques. La longueur de décohésion $d(\sigma)$ peut être exprimée en fonction de la contrainte appliquée σ et du cisaillement interfacial caractéristique τ . On souhaite comparer les deux modèles, l'évolution de la longueur de décohésion obtenue et son influence sur le comportement en traction.

En premier, une formulation de la longueur de décohésion $d(\sigma)$, en fonction de la contrainte appliquée σ , est décrite à partir du cisaillement τ . Une relation entre le cisaillement τ et les caractéristiques du microcomposite (coefficient de frottement μ , énergie de rupture de l'interface G_i^c , propriétés de la fibre et de la matrice) est proposée.

Ce modèle présenté décrit l'évolution de la longueur de décohésion d avec

$$\frac{d}{R_f} = \frac{1}{\tau} \left[\sigma_z^{f,max} - \left(\sigma_z^{f,min} + \gamma \right) \right], \quad (C-1)$$

où $\sigma_z^{f,max}$ représente la contrainte axiale maximale supportée par la fibre dans la zone endommagée et $\sigma_z^{f,min}$ la contrainte axiale minimale dans la zone saine de la fibre (figure 2.2b). Le saut de contrainte γ est défini par l'équation 2.2 à partir de l'énergie de rupture G_i^c .

La contrainte axiale dans la fibre loin de la fissure matricielle s'exprime en fonction de la contrainte appliquée σ à l'aide de (1.13) avec

$$\sigma_z^{f,min} = a_1 \sigma + \sigma_z^{f,th}, \quad \sigma_z^{f,th} = -\frac{1 - V_f a_1}{V_f} \sigma^T, \quad (C-2)$$

où a_1 est un coefficient déjà présenté et $\sigma_z^{f,th}$ est la contrainte résiduelle axiale dans la fibre. D'autre part, on peut écrire la contrainte $\sigma_z^{f,max}$ en fonction de σ avec

$$\sigma_z^{f,max} = \sigma \frac{\pi R_m^2}{\pi R_f^2} \quad \text{soit} \quad \sigma_z^{f,max} = \frac{1}{V_f} \sigma. \quad (C-3)$$

Enfin le saut de déplacement γ (équation 2.2) est donné par

$$\gamma = \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (C-4)$$

En utilisant les relations C-1 à C-4, ce modèle piloté par le cisaillement τ permet d'évaluer la longueur de décohésion d en fonction de σ avec

$$\frac{d}{R_f} = \frac{1}{\tau} \left[\left(\frac{1}{V_f} - a_1 \right) \sigma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T \right) \right], \quad (\text{C-5})$$

soit

$$\boxed{\frac{d}{R_f} = \frac{1}{\tau} \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} (\sigma - \sigma^{ci})}, \quad (\text{C-6})$$

où $\sigma^{ci} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T$ est la contrainte appliquée qui permet de propager la décohésion. A partir de ce modèle de rechargement linéaire où **le cisaillement interfacial est un paramètre caractéristique constant, la longueur de décohésion évolue linéairement en fonction du chargement** de traction. On ne retrouve pas l'accélération de la propagation de la décohésion avec le chargement (figure 2.15). Cette accélération est liée à la diminution de l'effort de compression dans la direction radiale.

Relation entre le cisaillement caractéristique τ et le coefficient de frottement μ

Pour des faibles valeurs de la contrainte appliquée ($\sigma \approx \sigma^{ci}$), l'évolution de la longueur de décohésion peut être considérée comme linéaire. En prenant en compte uniquement l'évolution de la longueur de décohésion $d(\sigma)$ pour $\sigma \approx \sigma^{ci}$, il est possible de relier le cisaillement caractéristique τ au coefficient de frottement μ . En effet, en dérivant l'expression $d(\sigma)$ (2.9), une relation linéaire approchée de la longueur de décohésion peut être déduite par

$$\frac{d}{R_f} \approx \frac{1}{\mu b_1} \frac{\sigma - \sigma^{ci}}{\sigma_{contact} - \sigma^{ci}} \quad \text{pour } \sigma \approx \sigma^{ci} \quad \text{et } \sigma \geq \sigma^{ci}. \quad (\text{C-7})$$

Puis en utilisant l'expression de la décohésion à l'aide du cisaillement interfacial caractéristique τ (C-6), le cisaillement τ peut être approché en fonction de μ par

$$\boxed{\tau \approx \frac{\mu b_1}{k} \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} (\sigma_{contact} - \sigma^{ci})}. \quad (\text{C-8})$$

Cette relation confirme que le cisaillement interfacial τ doit être considéré comme un paramètre dépendant du coefficient de frottement μ , de G_i^c ainsi que des caractéristiques du microcomposite (contraintes résiduelles, V_f , ...).

Bibliographie

HUTCHINSON, J. W. et H. M. JENSEN. 1990, «Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction», *Mechanics of Materials*, vol. 9, p. 139–163.

Annexe D

Modélisation des boucles d'hystérésis : Influence de l'endommagement et du frottement

Au cours du chapitre 2, une procédure par Eléments Finis a été présentée pour modéliser les boucles d'hystérésis du minicomposite en traction cyclée (section VI, page 99). Ces boucles d'hystérésis résultent de l'endommagement et des mécanismes de frottement à l'interface fibre/matrice. Le frottement est considéré par la loi de frottement de Coulomb (2.26 et 2.27). L'intérêt de cette analyse est de pouvoir **évaluer l'endommagement du minicomposite en traction ainsi que le coefficient de frottement** à partir de ces boucles.

Dans cette annexe, une étude de l'**influence des caractéristiques du minicomposite sur les boucles** a été réalisée. On s'intéresse en particulier à l'évolution du module tangent pendant la boucle. Ensuite, ce module tangent a été modélisé pour aboutir à un **modèle de comportement du minicomposite** au cours du cycle déchargement puis rechargement :

1. D'abord, les boucles d'hystérésis sont modélisées en fonction de la longueur de décohé- sion et du pas de fissuration matricielle au sein du minicomposite. Il est alors possible de simuler un essai de traction cyclée.
2. L'influence du type de conditions aux limites sur les boucles d'hystérésis est étudiée.
3. Une modélisation du module tangent est proposée ainsi qu'un modèle de comporte- ment du minicomposite au cours de la boucle.
4. Pour finir, l'influence du coefficient de frottement et du pas de fissuration matricielle est également étudiée.

Les résultats numériques présentés dans cette annexe sont obtenus à partir d'une cellule élémentaire d'un minicomposite de longueur $L = 100 \mu m$ dont les caractéristiques sont données dans le [tableau A-1](#). Sauf mention contraire, les conditions aux limites de type I sont considérées. Le contact à l'interface fibre/matrice et les contraintes résiduelles sont pris en compte avec une variation de température de $\Delta T = -1000^\circ C$ et les coefficients de dilatation du minicomposite étudié.

Simulation d'un essai de traction cyclée

La procédure EF est utilisée pour modéliser les boucles à partir de la contrainte au début du déchargement σ^p , de l'endommagement du microcomposite (pas de fissuration L et longueur de décohé- sion d), du frottement et des caractéristiques du microcomposite. La mise en œuvre du calcul EF est exposée page 99.

Pour pouvoir simuler plusieurs boucles au cours du chargement de traction, il faut préa- lablement déterminer l'endommagement (L et d) à chaque début de déchargement σ^p ([tableau D-1](#)). Le comportement en traction monotone a été simulé à l'aide du MZC lors de l'amorçage d'une fissure matricielle et de la propagation de la décohé- sion ([figure D-1](#)).

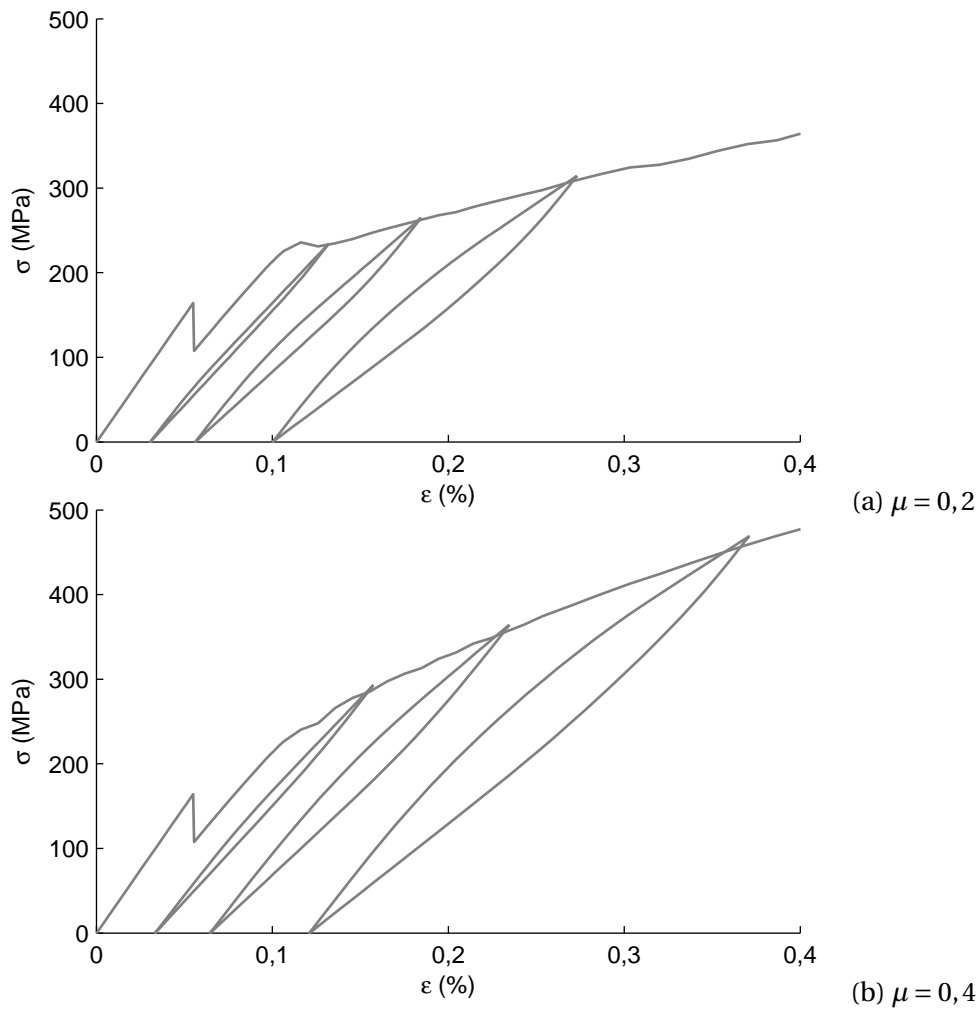


Figure D-1 – Courbe contrainte/déformation d'un essai de traction cyclée au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans la cellule de longueur $L = 100 \mu m$. Le glissement frottant est considéré avec un coefficient de frottement $\mu = 0,4$ (a) et $\mu = 0,2$ (b). L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 J.m^{-2}$. La courbe enveloppe (traction monotone) est obtenue à partir du MZC. Les boucles sont modélisées par EF séparément.

		$\mu = 0,4$	$\mu = 0,2$
1ère boucle	$d = 2R_f$	$\sigma^p = 290 MPa$	$\sigma^p = 232 MPa$
2ème boucle	$d = 4R_f$	$\sigma^p = 360 MPa$	$\sigma^p = 262 MPa$
3ème boucle	$d = 7R_f$	$\sigma^p = 460 MPa$	$\sigma^p = 307 MPa$

Tableau D-1 – Longueur de décohésion d et contrainte σ^p appliquée au début du déchargement pour les trois boucles modélisées [figure D-1](#).

La [figure D-2](#) représente l'évolution du module tangent E_{tan} au cours du déchargement (a) puis du rechargement (b) pour chacune des trois boucles modélisées précédemment (traction cyclée, [figure D-1](#)). Dans chaque cas une longueur de décohésion différente est fixée.

Le module tangent est décroissant au cours du déchargement ou rechargement jusqu'à une valeur constante. On observe que la valeur du module au début du déchargement est indépendante des boucles, donc de la longueur de décohésion. Ce module est noté E^* . Au début du rechargement, le module tangent a la même valeur E^* . En fin de déchargement ou de rechargement, le module tangent devient constant et on note E^p la valeur moyenne de ces deux modules. Au plus on note un écart de 10 % entre ces deux modules et E^p .

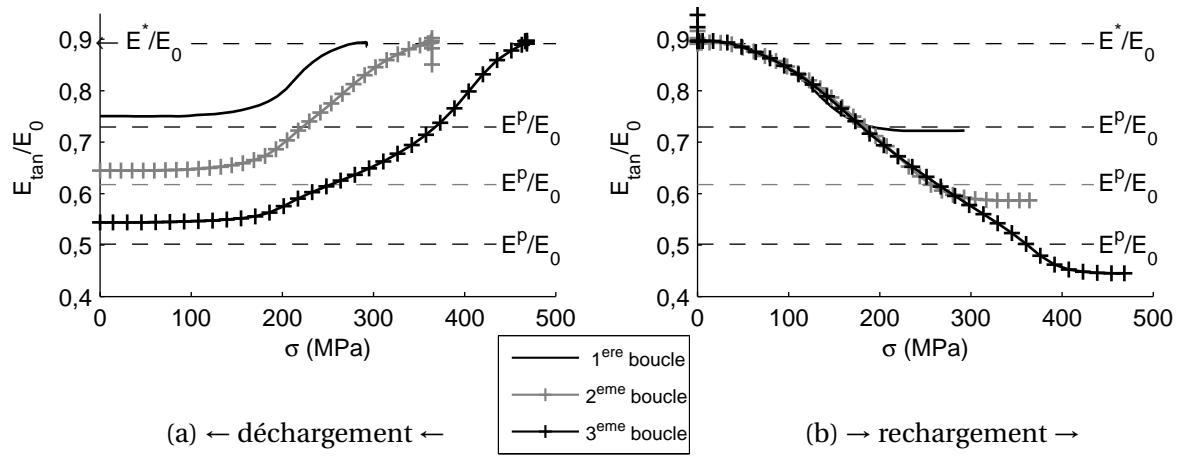


Figure D-2 – Module tangent au cours des cycles de déchargement (a) puis de rechargement (b). Le coefficient de frottement $\mu = 0,4$ et les boucles d'hystérésis ont été modélisées [figure D-1](#).

Influence des conditions aux limites

Les conditions aux limites de type I ont été utilisées. Dans le cadre de ces travaux un deuxième type de conditions aux limites a été étudié (CL II). La cellule élémentaire axisymétrique est toujours considérée avec une condition de bord droit supplémentaire sur la surface extérieure de la matrice. Le comportement de la boucle dépend du frottement résultant des contraintes radiales à l'interface et donc des conditions aux limites ([figure D-3](#)).

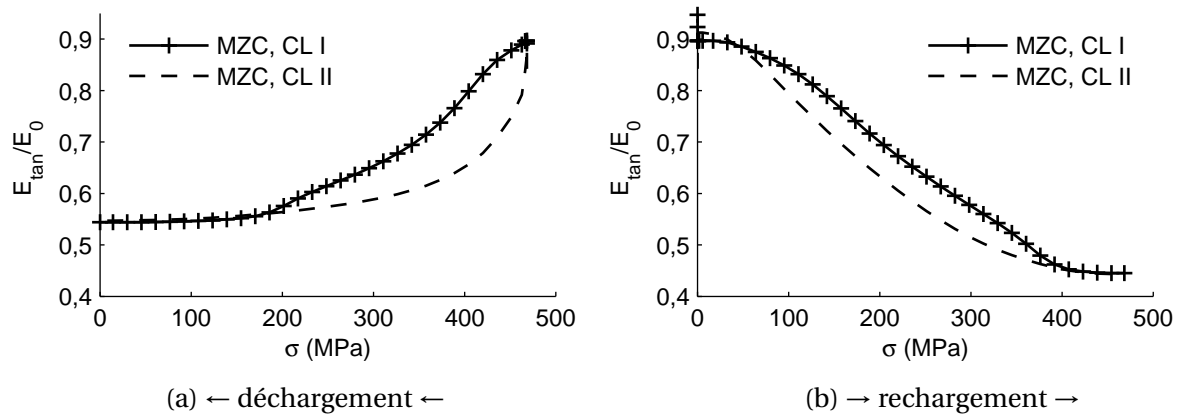


Figure D-3 – Module tangent au cours des cycles de déchargement (a) puis de rechargement (b). L'influence des conditions aux limites (CL) est étudiée. La dernière boucle est considérée pour une longueur de décohésion $d = 7R_f$ et le coefficient de frottement $\mu = 0,4$.

Au final, le module tangent est égal à E^* au début du déchargement ou rechargement et tend vers E^P à la fin du cycle, quel que soit le type de conditions aux limites. Ces deux modules dépendent de l'endommagement ([2.28](#) et [2.29](#)).

La diminution du module tangent avec le chargement, ce qui caractérise le comportement parabolique de la boucle, dépend uniquement du frottement à l'interface et de la densité de fissuration matricielle. La contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire de la boucle dépend en plus de la longueur de décohésion d . On propose une modélisation du module tangent en fonction du chargement, du coefficient de frottement μ et de l'endommagement. On en déduira une expression du comportement σ/ε au cours de la boucle.

Loi d'évolution du module tangent et des boucles d'hystérésis

En s'inspirant du modèle de [Vagaggini, Domergue et Evans, 1995], on s'intéresse à l'inverse du module tangent $\frac{E_0}{E_{tan}}$ en fonction de la contrainte $\Delta\sigma$ définie par $\Delta\sigma = \sigma$ au cours du rechargement et $\Delta\sigma = \sigma^p - \sigma$ au cours du déchargement. σ^p est la contrainte appliquée au début du déchargement.

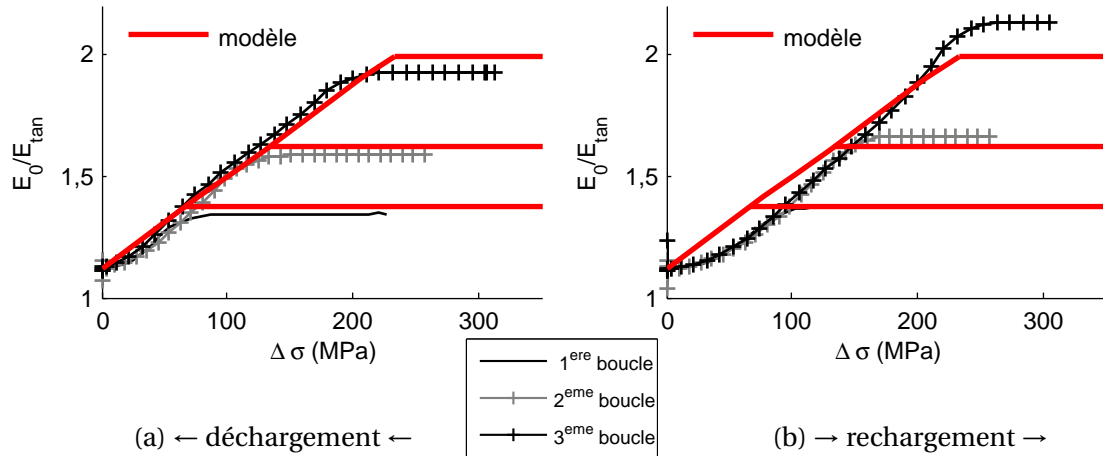


Figure D-4 – Module tangent au cours des cycles de déchargement (a) puis de rechargement (b). Le coefficient de frottement $\mu = 0,2$. La pente de la droite linéaire a été calculée $\frac{E_0}{2\mathcal{L}}$ et le paramètre $2\mathcal{L} = 1,25.10^{-20} Pa^{-2}$ pour $\mu = 0,2$.

L'inverse du module tangent $\frac{E_0}{E_{tan}}$ est croissant avec la contrainte $\Delta\sigma$ puis devient constant au delà d'une contrainte de transition notée σ^t . La valeur du module tangent lorsque la contrainte $\Delta\sigma > \sigma^t$ est approchée par le module E^p . On propose de modéliser $\frac{E_0}{E_{tan}}$ en fonction de $\Delta\sigma$ de manière bilinéaire (figure D-4) :

1. si $\Delta\sigma < \sigma^t$, on note $\frac{E_0}{2\mathcal{L}}$ la pente de la droite $\frac{E_0}{E_{tan}}$ en fonction de $\Delta\sigma$. Le paramètre \mathcal{L} (Pa^2) est évalué graphiquement à partir de la figure D-4. D'autre part, au début du déchargement ou du rechargement, lorsque $\Delta\sigma = 0$, le module tangent $E_{tan} = E^*$.

L'évolution de l'inverse du module tangent peut être approchée par $\frac{E_0}{E_{tan}} = \frac{E_0}{2\mathcal{L}}\Delta\sigma + \frac{E_0}{E^*}$.

2. lorsque $\Delta\sigma > \sigma^t$, alors $\frac{E_0}{E_{tan}} = \frac{E_0}{E^p}$.

La contrainte de transition σ^t peut se déterminer du fait que $\frac{E_0}{E^p} = \frac{E_0}{2\mathcal{L}}\sigma^t + \frac{E_0}{E^*}$. On en déduit que la contrainte de transition $\sigma^t = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*}\right)\frac{1}{2\mathcal{L}}$.

Le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$ ne dépend pas de la longueur de décohesion mais uniquement du coefficient de frottement μ , du pas de fissuration L et des caractéristiques du minicomposite.

La première partie linéaire de la courbe $\frac{1}{E_{tan}}$ en fonction de la contrainte $\Delta\sigma$ donnée par

$$\frac{1}{E_{tan}} = \frac{1}{2\mathcal{L}}\Delta\sigma + \frac{1}{E^*} \quad \text{si } \Delta\sigma \leq \sigma^t, \quad (\text{D-1})$$

correspond à l'évolution parabolique de la boucle. Puis lorsque le module tangent atteint le module E^p tel que

$$\frac{1}{E_{tan}} = \frac{1}{E^p} \quad \text{si } \Delta\sigma \geq \sigma^t, \quad (\text{D-2})$$

la boucle devient linéaire. On considère alors que les boucles d'hystérésis sont symétriques et sont modélisées à partir des mêmes relations (D-1 et D-2) dans le sens du déchargement ou du rechargement. La contrainte $\Delta\sigma = \sigma$ au cours du rechargement et $\Delta\sigma = \sigma^p - \sigma$ au cours du déchargement.

A partir de cette expression de l'inverse du module tangent (D-1 et D-2), il est possible de décrire le comportement σ/ε au cours du cycle déchargement rechargement. En notant que $E_{tan} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ on obtient

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{2\mathcal{L}}\Delta\sigma + \frac{1}{E^*} \right) d\sigma \quad \text{si } \Delta\sigma \leq \sigma^t \quad \text{et} \quad d\varepsilon = \frac{1}{E^p} d\sigma \quad \text{si } \Delta\sigma \geq \sigma^t. \quad (\text{D-3})$$

La contrainte et la déformation appliquée au début du déchargement sont notés σ^p et ε^p . La déformation ε^p peut être calculée en connaissant le module élastique $E^p = E(L, d)$ ainsi que les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$. Après intégration de la relation D-3, la déformation appliquée $\varepsilon(\sigma)$ s'exprime en fonction du sens de chargement par

$$\begin{array}{l} \text{déchargement} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\sigma) = \varepsilon^p - \mathcal{L}(\sigma^p - \sigma)^2 - \frac{1}{E^*}(\sigma^p - \sigma) \quad \text{si } \sigma \geq \sigma^p - \sigma^t \\ \varepsilon(\sigma) = -\frac{1}{E^p}((\sigma^p - \sigma^t) - \sigma) + \varepsilon^p - \varepsilon^t \quad \text{si } \sigma \leq \sigma^p - \sigma^t \end{array} \right. \\ \\ \text{rechargement} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(\sigma) = \mathcal{L}(\sigma^p)^2 + \frac{1}{E^*}\sigma^p + \varepsilon_{r,total} \quad \text{si } \sigma \leq \sigma^t \\ \varepsilon(\sigma) = \frac{1}{E^p}(\sigma - \sigma^t) + \varepsilon^t + \varepsilon_{r,total} \quad \text{si } \sigma \geq \sigma^t. \end{array} \right. \end{array} \quad (\text{D-4})$$

On note la contrainte de transition σ^t , au cours du rechargement, entre le domaine parabolique et linéaire ainsi que la déformation de transition ε^t par

$$\sigma^t = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{1}{2\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \varepsilon^t = \mathcal{L}(\sigma^t)^2 + \frac{1}{E^*}\sigma^t. \quad (\text{D-5})$$

La déformation $\varepsilon_{r,total}$ est la déformation résiduelle totale (figure D-6b) avec

$$\varepsilon_{r,total} = \varepsilon_r(L, d) + \varepsilon_{r,boucle}. \quad (\text{D-6})$$

La première déformation résiduelle $\varepsilon_r(L, d)$ a déjà été exprimée et peut aussi se déterminer par $\varepsilon_r(L, d) = \varepsilon^p - \frac{\sigma^p}{E^p}$. La déformation résiduelle $\varepsilon_{r,total}$ peut être déterminée en combinant la quatrième relation de D-4 avec l'expression de σ^t (D-5), soit

$$\varepsilon^p = \frac{1}{E^p} (\sigma^p - \sigma^t) + \varepsilon^t + \varepsilon_{r,total} \quad \text{et} \quad \sigma^t = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right) \frac{1}{2\mathcal{L}}. \quad (\text{D-7})$$

On obtient

$$\varepsilon_{r,total} = \varepsilon^p - \frac{\sigma^p}{E^p} + \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right)^2 \frac{1}{4\mathcal{L}}. \quad (\text{D-8})$$

On remarque que la déformation résiduelle résultant uniquement de la boucle d'hystérésis s'exprime alors par

$$\varepsilon_{r,boucle} = \left(\frac{1}{E^p} - \frac{1}{E^*} \right)^2 \frac{1}{4\mathcal{L}}. \quad (\text{D-9})$$

Après avoir identifié le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$ en fonction du coefficient de frottement μ et du pas de fissuration L , le comportement σ/ε au cours des boucles est modélisé par les relations D-4 à partir de la longueur de décohésion d et de la contrainte σ^p appliquée au début du déchargement (figure D-5).

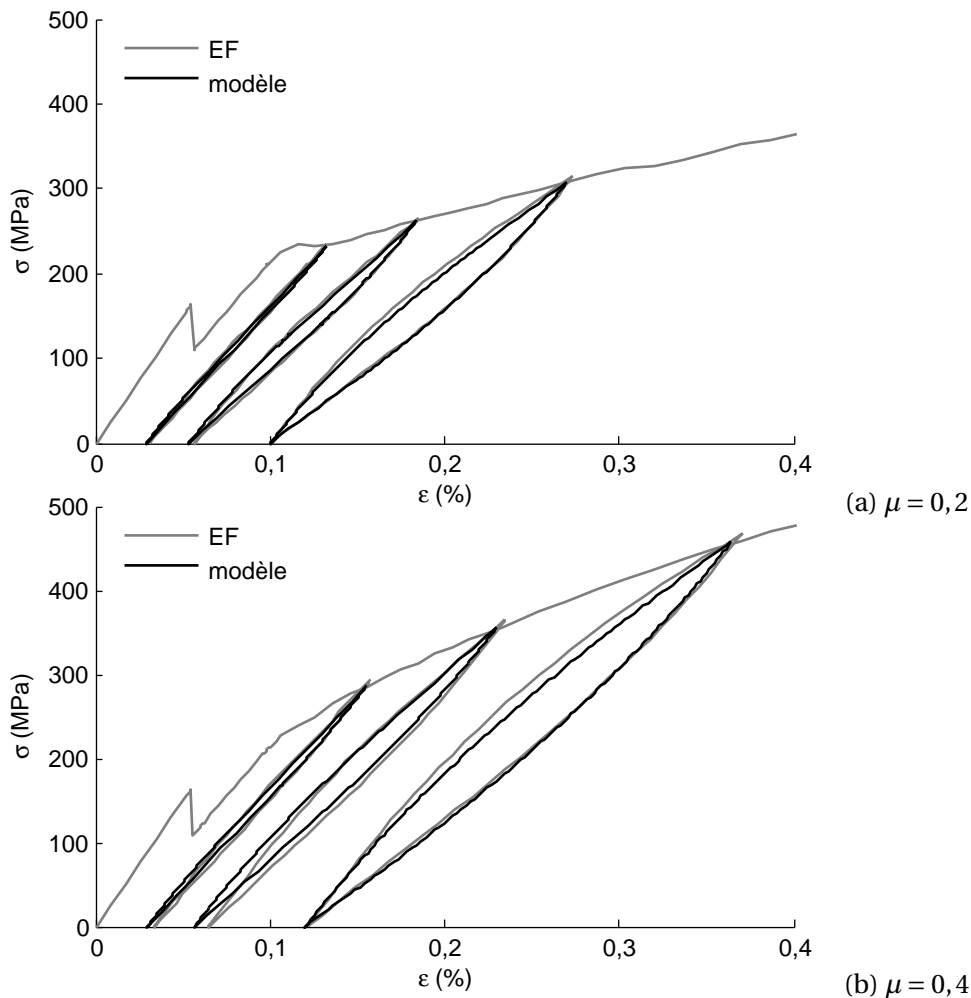


Figure D-5 – Courbe contrainte/déformation d'un essai de traction cyclée au cours de l'amorçage de la fissure matricielle et de la propagation de la décohésion interfaciale dans la cellule de longueur $L = 100 \mu\text{m}$. Le coefficient de frottement $\mu = 0,2$ (a) et $\mu = 0,4$ (b). L'énergie de rupture de l'interface est $G_i^c = 4 \text{ J.m}^{-2}$. La courbe enveloppe (traction monotone) est obtenue à partir du MZC. Les boucles sont modélisées séparément, par calcul EF d'une part et à l'aide des relations D-4 d'autre part.

Il est possible d'exprimer l'**ouverture de la boucle $\delta\epsilon_{max}$ à mi-hauteur** qui est obtenue pour une contrainte appliquée $\sigma = \frac{\sigma^p}{2}$. L'ouverture de la boucle $\delta\epsilon_{max}$ peut être calculée à l'aide des expressions D-4 de la déformation $\epsilon(\sigma)$. La déformation $\delta\epsilon_{max}$ est la différence des déformations $\epsilon\left(\frac{\sigma^p}{2}\right)$ entre le déchargement et le rechargement.

Si la contrainte σ^p au début du déchargement est telle que la contrainte de transition $\sigma^t \leq \frac{\sigma^p}{2}$, alors la boucle est linéaire à mi-hauteur et la déformation $\delta\epsilon_{max}$ ne dépend pas de $\frac{\sigma^p}{2}$ (figure D-6b). L'ouverture de la boucle est égale à la déformation résiduelle engendrée par la boucle d'hystérésis, soit $\delta\epsilon_{max} = \epsilon_{r,boucle}$. Si au contraire le chargement σ^p est plus faible tel que $\sigma^t > \frac{\sigma^p}{2}$, alors l'ouverture de la boucle à mi-hauteur est réduite.

En utilisant les expressions de la déformation $\epsilon(\sigma)$ D-4 on obtient pour les deux différents cas cités

$$\begin{cases} \delta\epsilon_{max} = \left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E^*}\right) \frac{1}{4\mathcal{L}} & \text{si } \sigma^t \leq \frac{\sigma^p}{2} \\ \delta\epsilon_{max} = \left(\frac{1}{E_p} - \frac{1}{E^*}\right) \frac{1}{4\mathcal{L}} - 2\mathcal{L} \left(\sigma^t - \frac{\sigma^p}{2}\right)^2 & \text{si } \sigma^t > \frac{\sigma^p}{2} \end{cases} \quad (D-10)$$

On note aussi que dans le cas d'une boucle d'hystérésis entièrement parabolique, l'ouverture de fissure à mi-hauteur s'exprime simplement par

$$\delta\epsilon_{max} = \frac{\mathcal{L}}{2} (\sigma^p)^2 \quad (D-11)$$

Au final, les boucles d'hystérésis sont modélisées soit par EF ou alors en utilisant les relations D-4 après avoir déterminé le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$. Ces boucles peuvent permettre d'évaluer l'endommagement et le coefficient de frottement du minicomposite en traction cyclée en calculant les valeurs des modules $E^* = E(L)$, $E^p = E(L, d)$ et le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$.

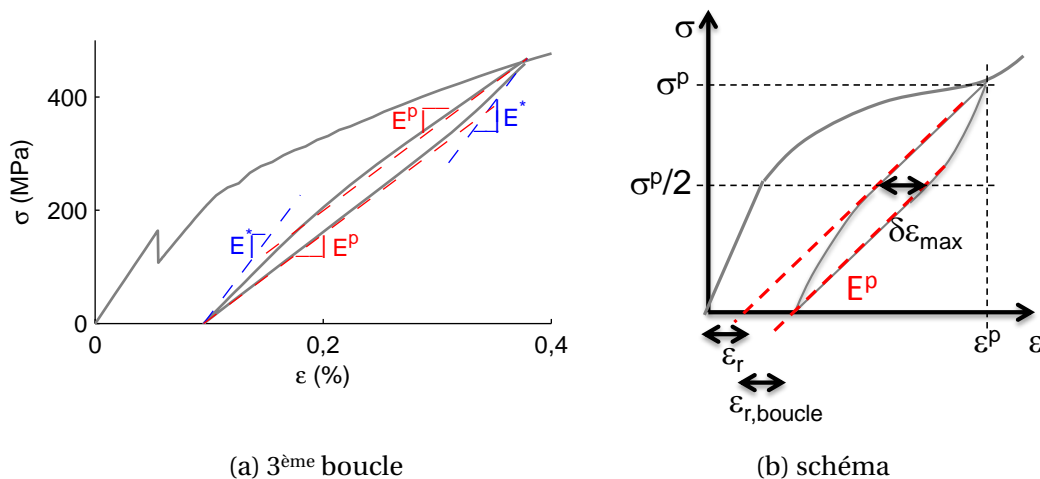


Figure D-6 – Caractérisation du module tangent au cours des boucles. (a) E^* est le module au début du déchargement et du rechargement. Le module en fin de déchargement et de rechargement est approché par E^p . (b) Les déformations résiduelles sont la somme de ϵ_r qui dépend de l'endommagement et des contraintes résiduelles et de $\epsilon_{r,boucle}$ qui résulte du comportement frottant au cours des boucles.

Influence du coefficient de frottement et de la densité de fissuration matricielle

Au début du déchargement ou du rechargement, le module tangent E_{tan} est égal au module E^* puis tend vers le module E^p qui caractérise le comportement linéaire de la boucle d'hystérésis. Le coefficient de frottement modifie la vitesse de diminution du module tangent de E^* vers le module E^p : un coefficient de frottement faible entrainera une diminution du module tangent plus rapide (figure D-7). La transition entre le comportement parabolique et linéaire est alors plus précoce avec une contrainte de transition σ^t plus faible.

Le paramètre $\mathcal{L}(\mu, L)$ déterminé en fonction de μ est donné figure D-7d.

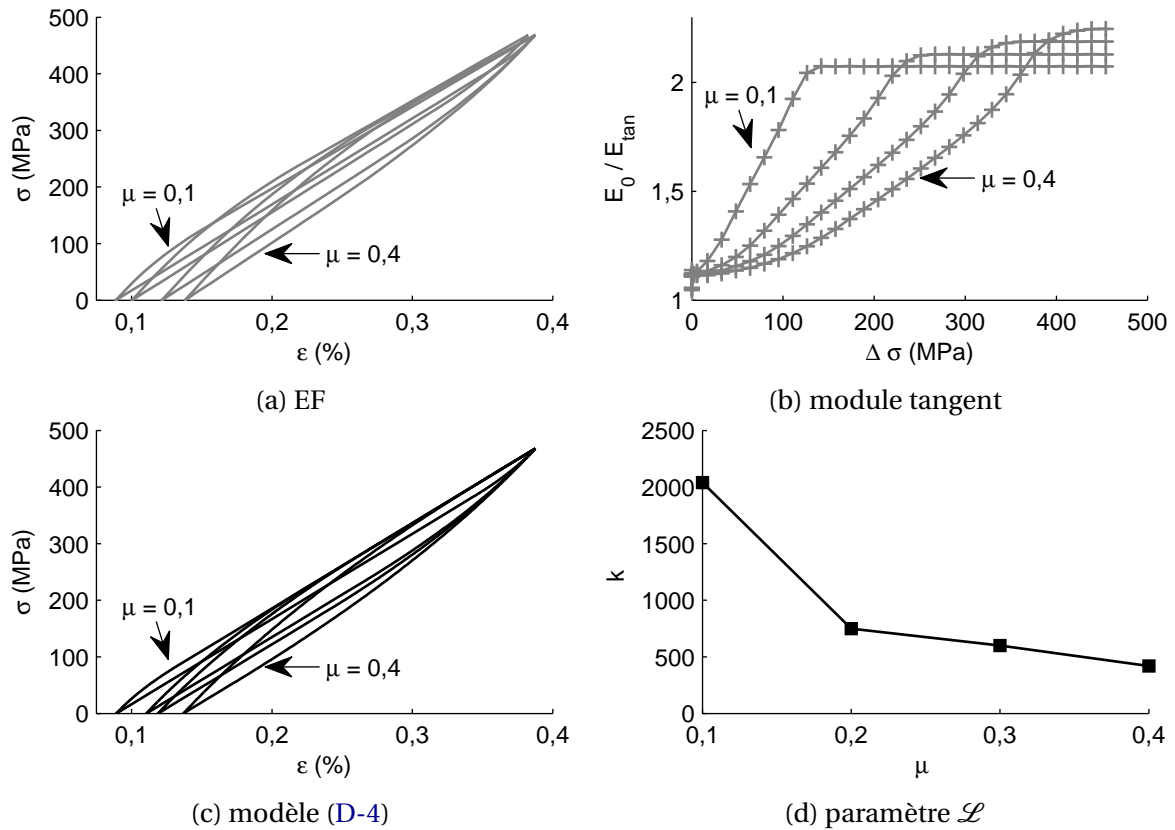


Figure D-7 – Modélisation des boucles d'hystérésis en fonction du coefficient de frottement $\mu = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4]$, à l'aide des calculs EF (a) et en utilisant les relations D-4 (c). Pour cela, le paramètre \mathcal{L} a été identifié à partir de μ (d) en utilisant l'évolution du module tangent au cours du rechargement (b). Le pas de fissuration matricielle est $L = 100 \mu m$ et la longueur de décohésion est $d = 7R_f$.

L'évolution du module tangent dépend aussi de la densité de fissuration matricielle (figure D-8). Le pas de fissuration est noté L . Les boucles d'hystérésis sont modélisées par EF à partir d'une cellule de taille L .

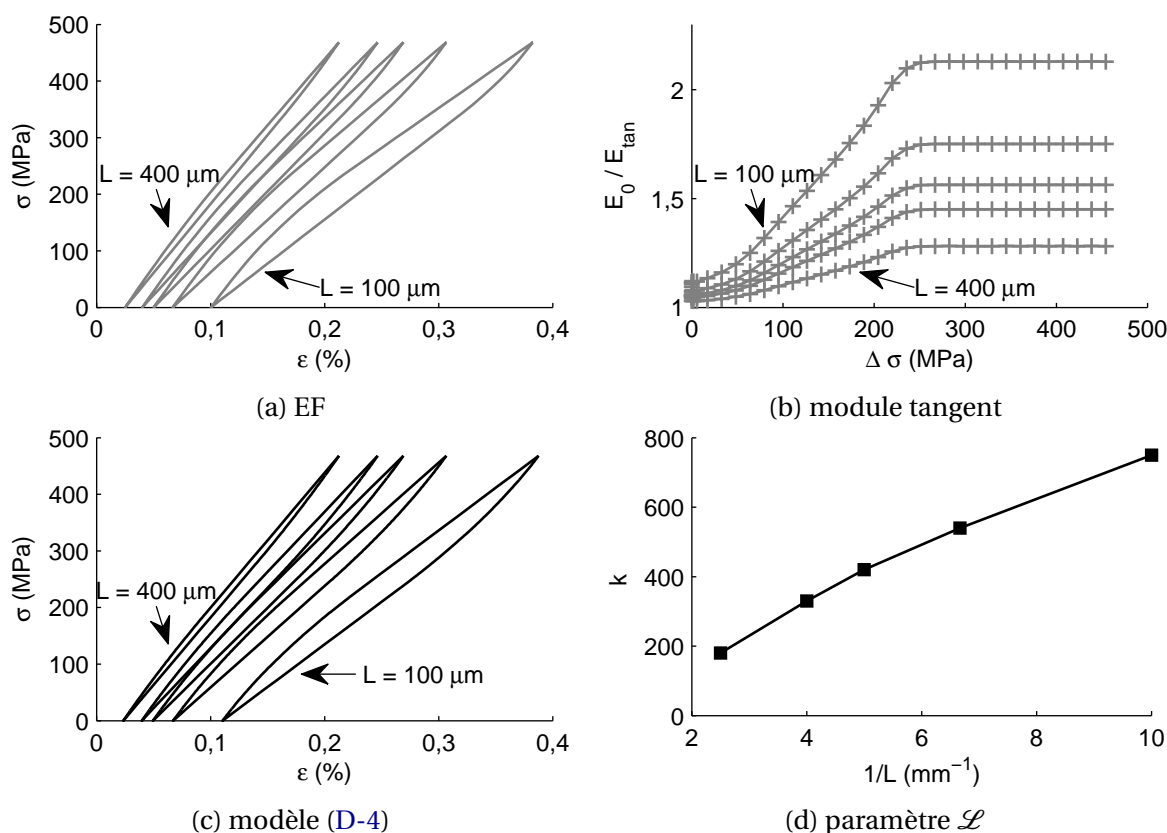


Figure D-8 – Modélisation des boucles d'hystérésis en fonction du pas de fissuration matricielle $L = [100; 150; 200; 250; 400] \mu m$, à l'aide des calculs EF (a) et en utilisant les relations D-4 (c). Pour cela, le paramètre \mathcal{L} a été identifié à partir de L (d) en utilisant l'évolution du module tangent au cours du rechargement (b). Le coefficient de frottement est $\mu = 0,4$ et la longueur de décohérence est $d = 7R_f$.

Le paramètre \mathcal{L} est linéaire en fonction de la densité de fissuration matricielle $1/L$ (figure D-8d). On note que la contrainte de transition σ^t entre le comportement parabolique et linéaire est peu sensible à la variation de densité de fissuration.

Bibliographie

VAGAGGINI, E., J. DOMERGUE et A. G. EVANS. 1995, «Relationships between hysteresis measurements and the constituent properties of ceramic matrix composites : I, Theory», *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 78, p. 2709–2720.

Annexe E

Coefficients de Hutchinson et Jensen

Au cours du chapitre 2, les propriétés mécaniques du minicomposite endommagé ont été décrites. Le module longitudinal, le coefficient de dilatation, les déformations résiduelles et la contrainte à l'amorçage de la fissure matricielle et de la décohésion interfaciale ont été exprimés à partir des caractéristiques du minicomposite et à l'aide de coefficients. Cette annexe liste chacun de ces coefficients pour les deux types de conditions aux limites CL I et CL II.

Coefficients a_1 et a_2 : Répartition des contraintes dans le minicomposite sain

Les deux coefficients a_1 et a_2 permettent de décrire la répartition des contraintes dans les zones saines du minicomposite. On note que ces deux coefficients ne dépendent donc pas du type de conditions aux limites. Ces coefficients interviennent notamment dans l'expression du coefficient de dilatation du minicomposite.

Le coefficient a_1 s'écrit simplement par

$$a_1 = \frac{E_f}{E_0} \quad \text{si} \quad \nu_f = \nu_m. \quad (\text{E-1})$$

Dans le cas contraire si $\nu_f \neq \nu_m$, ce coefficient peut être calculé en utilisant les relations données par [Hutchinson et Jensen, 1990]. On observe que la différence entre les coefficients de Poisson n'a qu'une influence négligeable sur la valeur de ce coefficient a_1 . Le coefficient a_1 sera alors toujours déterminé par $a_1 = \frac{E_f}{E_0}$.

Le coefficient a_2 dépend de la fraction volumique de fibre V_f et des propriétés élastiques des constituants fibre et matrice. Si les coefficients de Poisson sont identiques $\nu_f = \nu_m = \nu$, alors le coefficient a_2 peut s'exprimer par la relation

$$a_2 = \frac{(1 - V_f)E_f}{(1 + \nu)(E_f + (1 - 2\nu)E_0)} \left(2\nu\lambda + 1 - \nu + (1 + \nu) \frac{E_f}{E_0} \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\alpha_r^f - \alpha_r^m}{\alpha_z^f - \alpha_z^m}. \quad (\text{E-2})$$

Ce coefficient a_2 a été formulé par [Hutchinson et Jensen, 1990] et dépend aussi des coefficients de dilatation de la fibre (α_z^f et α_r^f) et de la matrice (α_z^m et α_r^m) dans la direction axiale (z) et radiale (r). Si des coefficients de Poisson différents $\nu_f \neq \nu_m$ sont considérés, le coefficient a_2 peut être calculé numériquement à partir des relations fournies dans [Hutchinson et Jensen, 1990].

Coefficient c_1 : propriétés du minicomposite endommagé avec décohésion

Le coefficient c_1 dépend des caractéristiques du microcomposite et du type de conditions aux limites. Dans le cas où les coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice sont identiques $\nu_f = \nu_m = \nu$ et en considérant des conditions aux limites de type CL I, le coefficient c_1 s'écrit

$$c_1^2 = \frac{(1 + \nu)(1 - V_f)E_m^2(E_f + (1 - 2\nu)E_0)}{4V_f^2E_0E_f((1 + \nu)E_f + (1 - \nu)E_0)} \quad (\text{E-3})$$

Si $\nu_f \neq \nu_m$ ou pour les conditions aux limites CL II, il est nécessaire de déterminer numériquement la valeur du coefficient c_1 . On constate que l'influence des conditions CL I ou II est très négligeable sur la valeur de c_1 (écart de moins de 1 %). La relation E-3 sera alors utilisée pour calculer c_1 pour les deux types de CL. D'autre part, c_1 présente un écart d'au plus 4 % si les coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice ont une valeur différente ($\nu_f = 0,12$ et $\nu_m = 0,2$).

Coefficient b_1 : Evolution de la longueur de décohésion

Le coefficient b_1 se détermine par

$$b_1 = \frac{\nu E_0}{(1 + \nu)E_f + (1 - \nu)E_0} \quad \text{pour CL I,}$$

$$b_1 = \frac{(1 - \nu^2)\bar{E} + (1 - \nu)^2 E_m - (1 + \nu) [2(1 - \nu)^2 E_f + (1 - 2\nu)(1 - \nu + V_f(1 + \nu))(E_m - E_f)]}{2\nu(1 - \nu) [(1 + \nu)\bar{E} + (1 - \nu)E_m]} \quad \text{pour CL II,}$$
(E-4)

et $\bar{E} = V_f E_m + (1 - V_f)E_f$. Cette relation est établie pour une fibre isotrope avec $\nu_f = \nu_m$. Sinon la détermination de ce coefficient b_1 nécessite de résoudre les relations de [Hutchinson et Jensen, 1990].

Influence de la différence de coefficient de Poisson

Module longitudinal

Lorsque $\nu_f \neq \nu_m$, l'expression 1.4 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = E_f V_f + (1 - V_f) E_m + 2k (\nu_m - \nu_f)^2 V_f (1 - V_f) \\ \text{avec } 1/k = \frac{1 + \nu_m}{E_m} + V_f \frac{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)}{E_m} + (1 - V_f) \frac{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}{E_f} \end{array} \right. , \quad (\text{E-5})$$

et une différence entre les coefficients de Poisson modifie la valeur de E_0 d'au plus 0,5 %. On considère dans la suite que les coefficients de Poisson de la fibre et de la matrice sont identiques.

Coefficient de dilatation dans le cas $\nu_f \neq \nu_m$

Lorsque $\nu_f \neq \nu_m$ il faut exprimer le coefficient de dilatation sous sa forme générale

$$\alpha_0 = V_f \alpha_z^f + (1 - V_f) \alpha_z^m - V_f \Delta \alpha_z \left[a_2 \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) + 2a_4 \left(\nu_m - \nu_f \frac{E_m}{E_f} \right) \right]. \quad (\text{E-6})$$

Les coefficients a_2 et a_4 dépendent de la fraction volumique de fibre V_f et des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice. Ils sont déterminés numériquement à partir des relations données dans [Hutchinson et Jensen, 1990] et sont illustrés figure E-1.

On rappelle que les contraintes résiduelles dans le microcomposite sain ne dépendent pas des conditions aux limites CL I ou II. Dès lors les coefficients a_2 et a_4 s'expriment identiquement quelque soient les conditions aux limites.

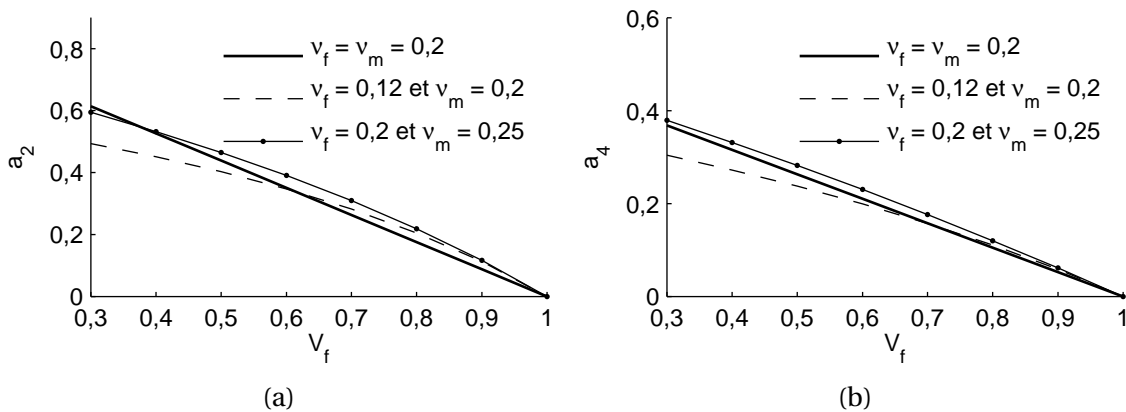


Figure E-1 – Evolution des coefficients a_2 (a) et a_4 (b) en fonction de la fraction volumique de fibres V_f . Ces valeurs sont obtenues pour les conditions aux limites CL I ou CL II.

Si l'influence de la différence de coefficient de Poisson sur le module élastique E_0 est négligeable, les calculs réalisés montrent que la valeur du coefficient de dilatation α_0 est plus élevée d'au plus 2 % dans le cas où $\nu_f = 0.12$ et $\nu_m = 0.2$.

Bibliographie

HUTCHINSON, J. W. et H. M. JENSEN. 1990, «Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction», *Mechanics of Materials*, vol. 9, p. 139–163.

Annexe F

Expression de la déformation axiale du microcomposite en traction

Le module élastique longitudinal et les contraintes résiduelles du microcomposite ou minicomposite en traction ont été exprimés sans prendre en compte le glissement frottant à l'interface fibre/matrice. La fissure de la matrice a été considérée, puis la décohésion interfaciale a été rajoutée dans l'analyse.

Plusieurs hypothèses simplificatrices peuvent être faites : prise en compte d'un cisaillement interfacial constant, expressions des contraintes axiales simplifiées. La déformation axiale est déterminée en fonction de la contrainte appliquée par des relations semi-analytiques sans ces simplifications. Dans cette annexe, les expressions de la déformation axiale en considérant ces simplifications sont développées. De plus le frottement interfacial n'a pas été pris en compte précédemment et cette annexe est consacrée à exprimer la déformation axiale en présence du glissement frottant.

D'autre part, l'évolution de la décohésion interfaciale avec glissement frottant peut être exprimée en décrivant la contrainte axiale dans la fibre.

Les développements suivants sont présentés :

1. Le modèle de McCartney permet une modélisation réaliste de la répartition de la contrainte dans le microcomposite avec la fissure matricielle. La déformation axiale peut alors être calculée en utilisant ce modèle, sans et avec la prise en compte des contraintes résiduelles.
2. La décohésion interfaciale est ensuite considérée sans prendre en compte le frottement à l'interface. La déformation axiale du microcomposite est exprimée en fonction de la contrainte appliquée en simplifiant la contrainte axiale dans la fibre. Un raisonnement en tranche est utilisé pour déterminer le déplacement total appliqué.
3. La déformation axiale obtenue est comparée au modèle semi-analytique qui permet une modélisation réaliste de la répartition des contraintes.
4. Enfin, le glissement frottant est pris en compte à l'aide de plusieurs hypothèses. D'abord, le cisaillement est considéré constant le long de l'interface et quelque soit le chargement axial. Un modèle simplifié de la contrainte axiale permet d'exprimer la déformation axiale appliquée à partir de la contrainte axiale moyenne et du cisaillement interfacial caractéristique τ .

Ce modèle est comparé au modèle de Lu et Hutchinson qui propose une expression semi-analytique de la déformation axiale.

5. Il est plus réaliste de considérer le cisaillement interfacial en fonction du coefficient de frottement μ et de la contrainte radiale σ_r par la relation $\tau = -\mu\sigma_r$. On utilise à nouveau le modèle simplifié de la contrainte axiale supportée par la fibre pour déterminer la déformation appliquée. Cette contrainte axiale dans la fibre le long de la zone de décohésion est déterminée à partir du cisaillement interfacial.

Déformation appliquée sur le microcomposite contenant une fissure matricielle

On considère le microcomposite de longueur L contenant une fissure matricielle en son centre. Un chargement de traction axial est appliqué avec une contrainte axiale σ .

Le modèle de rechargement linéaire de la contrainte ne considère pas la variation de contrainte au voisinage de la fissure matricielle. Dans ce cas la présence de la fissure matricielle ne modifie pas le module élastique longitudinal.

Le modèle semi-analytique développé au cours de ce travail de thèse demande d'identifier par calculs EF le coefficient appelé D_1^0 . Le module élastique longitudinal $E(L)$ du microcomposite de longueur L contenant une fissure matricielle s'exprime alors par

$$\frac{1}{E(L)} = \frac{1}{E_0} \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L} \right). \quad (\text{F-1})$$

où E_0 est le module du microcomposite sain.

Le modèle de Mc Cartney¹ permet une modélisation réaliste de la répartition des contraintes qui rend compte de la variation de contrainte au voisinage de la fissure matricielle. Le déplacement axial supplémentaire résultant de la fissure matricielle est noté $\Delta_\infty(\sigma)$.

Sans contraintes résiduelles

Sans les contraintes résiduelles d'origine thermique, ce déplacement supplémentaire est proportionnel à la contrainte axiale appliquée σ ,

$$\Delta_\infty(\sigma) = \overline{\Delta_\infty} \frac{\sigma}{E_0}, \quad (\text{F-2})$$

où le déplacement $\overline{\Delta_\infty}$ dépend des caractéristiques du microcomposite. $\overline{\Delta_\infty}$ peut être calculé en résolvant les équations de Mc Cartney¹.

Le déplacement axial $U_{méca}$ appliqué sur le microcomposite peut alors s'écrire comme la somme du déplacement du microcomposite sain et du déplacement supplémentaire résultant de la fissure matricielle, soit

$$U_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} L + \Delta_\infty(\sigma). \quad (\text{F-3})$$

On en déduit la déformation moyenne du microcomposite

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{E_0} \frac{\overline{\Delta_\infty}}{L}. \quad (\text{F-4})$$

Etant donné que les contraintes d'origine thermique ne sont pas prises en compte, le module élastique du microcomposite $E(L)$ de longueur L contenant une fissure matricielle peut s'exprimer suivant la relation

$$\frac{1}{E(L)} = \frac{1}{E_0} \left(1 + \frac{\overline{\Delta_\infty}}{L} \right). \quad (\text{F-5})$$

On retrouve alors l'Équation F-1 présentée au chapitre 2. Le coefficient D_1^0 s'écrit en fait

$$D_1^0 = \frac{\overline{\Delta_\infty}}{R_f}. \quad (\text{F-6})$$

1. L.N. Mc Cartney (1989), "New theoretical model of stress transfert between fiber and matrix in a uniaxially fiber-reinforced composite", Proc. Royal Soc. London A, vol. 425, n°1868, p. 215-244

Le coefficient D_1^0 représente la variation de contrainte axiale supportée par la fibre et la matrice au voisinage de la fissure matricielle. Ce coefficient est déterminé par calculs EF. Le modèle de McCartney donne un coefficient D_1^0 avec 15 % d'écart par rapport à la valeur du coefficient identifiée par EF.

Avec contraintes résiduelles

En présence des contraintes résiduelles, le déplacement $U_{méca}$ appliqué sur le microcomposite se calcule en considérant les trois éléments suivants :

- D'une part, le déplacement axial total dans la zone saine dépend à la fois du chargement appliqué σ et des précontraintes d'origine thermique. En reprenant la description du chapitre 2 (Équation 1.13 p. 37), la contrainte axiale dans la fibre s'écrit

$$\sigma_z^f = a_1 \sigma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^T. \quad (F-7)$$

Le deuxième terme exprime la contrainte axiale résiduelle subie par la fibre à partir de la contrainte de compression σ^T . Cette contrainte axiale $-\sigma^T$ est supportée par le microcomposite lorsque la matrice est déchargée dans la direction axiale. Cela correspond à une fissure matricielle fermée. On note le coefficient $a_1 = \frac{E_f}{E_0}$ et V_f est la fraction volumique de fibre.

Le déplacement total $U_{total,sain} = \frac{\sigma_z^f}{E_f} L$ dans la zone saine s'écrit alors

$$U_{total,sain} = \frac{\sigma}{E_0} L - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f E_f} \sigma^T L. \quad (F-8)$$

Pour simplifier l'écriture, on note

$$U_{total,sain} = \frac{\sigma}{E_0} L - A \frac{\sigma^T}{E_0} L \quad \text{avec} \quad A = \frac{1 - a_1 V_f}{a_1 V_f}. \quad (F-9)$$

- D'autre part, le déplacement supplémentaire résultant de la fissure matricielle s'obtient simplement par

$$\Delta_\infty (\sigma + \sigma^T) = \frac{\sigma + \sigma^T}{E_0}, \quad (F-10)$$

la fissure matricielle étant refermée lorsque le chargement axial $\sigma = -\sigma^T$, il n'en résulte aucun déplacement supplémentaire.

- Enfin il faut soustraire le déplacement axial résiduel obtenu après élaboration à haute température noté U_{th} . Sans chargement, la contrainte axiale supportée par la fibre s'écrit uniquement

$$\sigma_z^f = - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^T. \quad (F-11)$$

Le déplacement résiduel s'exprime alors par

$$U_{th} = -A \frac{\sigma^T}{E_0} L, \quad (F-12)$$

en reprenant le coefficient A défini Équation F-18.

Finalement le déplacement axial appliqué sur le microcomposite s'obtient par la somme $U_{méca} = U_{total,sain} + \Delta_{\infty}(\sigma + \sigma^T) - U_{th}$ soit

$$U_{méca} = \frac{\sigma}{E_0}L + \overline{\Delta_{\infty}} \frac{\sigma + \sigma^T}{E_0} . \quad (F-13)$$

Ce raisonnement sera repris pour le calcul de la déformation appliquée sur le microcomposite contenant la décohésion interfaciale.

On retrouve alors l'expression de la déformation axiale $\varepsilon_{méca}$ appliquée sur le microcomposite

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L} \right) + \frac{\sigma^T}{E_0} D_1^0 \frac{R_f}{L} \quad \text{avec} \quad D_1^0 = \frac{\overline{\Delta_{\infty}}}{R_f} , \quad (F-14)$$

qui se décompose en un terme de déformation élastique de module $E(L)$ (Équation F-1) et un terme de déformation résiduelle $\varepsilon_r(L) = \frac{\sigma^T}{E_0} D_1^0 \frac{R_f}{L}$ (Équation 1.19 du chapitre 2).

La distance de déchargement de la contrainte axiale de la matrice au voisinage de la fissure matricielle est appelée **zone transitoire**. Si cette zone transitoire est négligée, le comportement du microcomposite fissuré est celui du microcomposite sain et le coefficient $D_0^1 = 0$.

Déformation appliquée sur le microcomposite contenant une fissure matricielle et une décohésion interfaciale sans présence de frottement – zone transitoire négligée

On considère, en plus du cas précédent, une décohésion de longueur d au sein du microcomposite de longueur L , répartie de part et d'autre de la fissure matricielle.

Au cours du chapitre 2, la déformation axiale du microcomposite endommagé a été exprimée à partir d'une modélisation réaliste de la variation du champ de contrainte en considérant la zone transitoire qui apparaît en pointe de décohésion. **On suppose au cours de ce paragraphe que la décohésion est suffisamment grande pour pouvoir négliger la zone transitoire** (figure 1.24). Les contraintes supportées par la fibre et la matrice sont alors schématisées figure F-1 (modélisation de tranches planes).

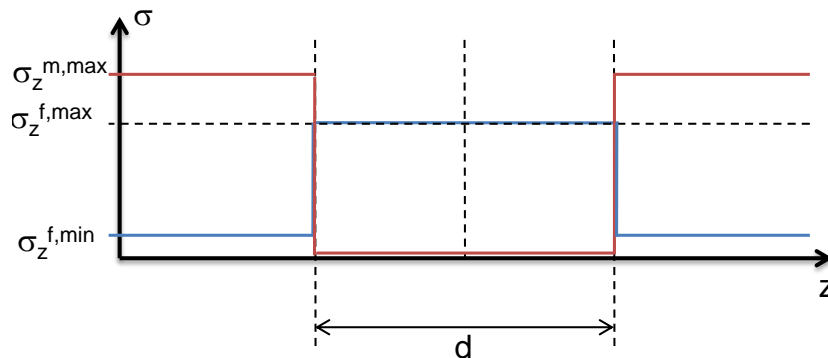


Figure F-1 – Représentation simplifiée des contraintes axiales dans les fibres et la matrice au sein du microcomposite contenant la décohésion de longueur d sans frottement.

Cela permet de ramener l'analyse des efforts supportés par le microcomposite simplement à :

- la zone saine du microcomposite sur la distance $L - d$,
- et la zone endommagée où seule la fibre supporte les efforts appliqués sur la distance d .

Sans contraintes résiduelles

On peut alors exprimer le déplacement axial $U_{méca}$ du microcomposite par

$$U_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} (L - d) + \frac{\sigma}{V_f E_f} d, \quad (F-15)$$

ce qui donne la déformation axiale $\varepsilon_{méca} = \frac{U_{méca}}{L}$

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left[1 + \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \frac{d}{L} \right]. \quad (F-16)$$

On remarque que l'Équation F-16 donne bien

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \quad \text{si} \quad d = 0 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{V_f E_f} \quad \text{si} \quad \frac{d}{L} = 1. \quad (F-17)$$

Autrement dit, sans décohésion la déformation axiale est celle du microcomposite sain puisque la zone transitoire de rerépartition des contraintes en extrémité de fissure est négligée. A l'opposé, si le microcomposite présente une décohésion interfaciale sur toute sa longueur ($d = L$), alors seule la fibre supporte les efforts.

D'autre part le coefficient A (Équation F-18) peut s'écrire

$$A = \frac{1 - a_1 V_f}{a_1 V_f} \quad \text{ou} \quad A = \frac{E_0}{V_f E_f} - 1, \quad (F-18)$$

car le coefficient $a_1 = \frac{E_f}{E_0}$. Puisque les contraintes résiduelles ne sont pas prises en compte dans cette analyse, le module élastique moyen $E(L, d)$ du microcomposite peut être déduit de la déformation appliquée $\varepsilon_{méca}$ ce qui donne

$$\frac{1}{E(L, d)} = \frac{1}{E_0} \left[1 + A \frac{d}{L} \right]. \quad (F-19)$$

Cette expression du module $E(L, d)$ correspond à l'Équation 1.33 (chapitre 2)

$$\frac{1}{E(L, d)} = \frac{1}{E(L, d)} \left(1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \right) \quad \text{avec} \quad D_1(L, d) \frac{R_f}{L} = D_1^0 \left(1 - \frac{d}{L} \right) \frac{R_f}{L} + \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \frac{d}{L}, \quad (F-20)$$

en ayant remarqué que $D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \approx \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \frac{d}{L}$. Le coefficient $D_1^0 = 0$ pour être cohérent avec la simplification faite en négligeant la zone transitoire.

Avec contraintes résiduelles

Pour déterminer le déplacement axial du microcomposite, le raisonnement utilisé précédemment, sans prise en compte de la déformation résiduelle, est repris. Le déplacement $U_{méca}$ est donné par

$$U_{méca} = U_{total, sain} + U_{total, endo} - U_{th}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} U_{total, sain} &= \frac{\sigma}{E_0} (L - d) - A \frac{\sigma^T}{E_0} (L - d) \\ U_{total, endo} &= \frac{\sigma}{V_f E_f} d \\ U_{th} &= -A \frac{\sigma^T}{E_0} L \end{cases} \quad (F-21)$$

Finalement, la déformation axiale appliquée sur le microcomposite est

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left[1 + A \frac{d}{L} \right] + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L}. \quad (\text{F-22})$$

On reconnaît alors la décomposition

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E(L, d)} + \varepsilon_r(L, d), \quad (\text{F-23})$$

avec le module moyen $E(L, d)$ (Équation F-19) et les déformations résiduelles $\varepsilon_r(L, d)$ décrites par l'Équation 1.39 (chapitre 2, page 50). Puisque la zone transitoire est négligée on peut écrire

$$\varepsilon_r(L, d) = A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L}. \quad (\text{F-24})$$

Une décohésion interfaciale de taille suffisante est considérée pour pouvoir négliger la zone transitoire et ainsi pouvoir écrire que le coefficient $D_1^0 \approx 0$.

Bilan sur la prise en compte de la zone transitoire de rerépartition des contraintes axiales en extrémité de fissure

On souhaite étudier l'erreur commise entre le module élastique présenté au chapitre 2 (Équation F-20) et l'approximation de l'Équation F-19 en négligeant la zone transitoire. La figure F-2 illustre cet écart en fonction de la longueur de décohésion d . Les valeurs de d et du pas de fissuration L utilisées couvrent l'ensemble des valeurs de d et L pour un microcomposite ou un minicomposite sollicité en traction. Le coefficient D_1^0 nécessaire pour cette comparaison a été donné figure 1.5, chapitre 2 page 34.

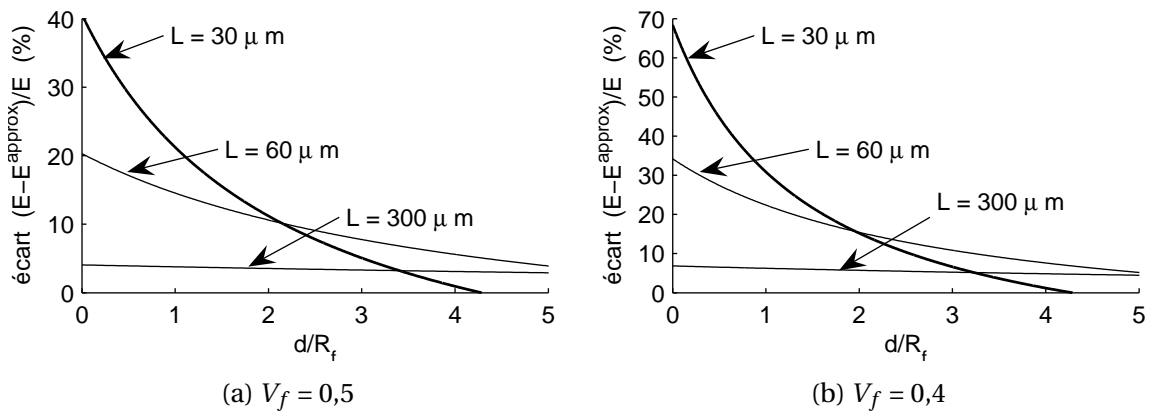


Figure F-2 – Ecart entre le module $E(L, d)$ présenté au chapitre 2 (Équation F-20) et l'approximation (Équation F-19) en fonction de la longueur de décohésion d et pour plusieurs valeurs du pas de fissuration L . Les caractéristiques du microcomposite sont : $R_f = 7 \mu m$, $E_f = 200 \text{ GPa}$ et $E_m = 400 \text{ GPa}$.

Le module élastique est moins sensible au fait de négliger la zone transitoire si

- la longueur de décohésion est suffisamment grande pour un pas de fissuration L donné,
- la densité de fissuration est faible, ce qui équivaut à un pas de fissuration L important.

En effet la distance de rerépartition des contraintes en extrémité de la décohésion est moins grande proportionnellement à L .

L'écart entre les deux expressions du module est d'autant plus élevé que la fraction volumique de fibre V_f est faible. Ainsi avec un pas de fissuration $L = 60 \mu m$, il faut que $d \geq 2R_f$ pour atteindre au plus 10 % d'écart si $V_f = 0,5$ (figure F-2a) et $d \geq 3,5R_f$ si $V_f = 0,4$ (figure F-2b).

Pour décrire le comportement au cours de l'évolution de l'endommagement caractérisé par les variables $1/L$ et d croissantes avec le chargement, il est nécessaire de considérer cette zone transitoire de rerépartition des contraintes à la pointe de la décohésion.

Déformation appliquée sur le microcomposite contenant une fissure matricielle et une décohésion interfaciale en présence de frottement :
hypothèse de cisaillement interfacial constant – zone transitoire négligée

Le glissement frottant à l'interface entre la fibre et la matrice est désormais pris en compte et modélisé par un cisaillement interfacial constant τ . Il s'agit alors du modèle de recharge-ment linéaire illustré [figure F-3](#).

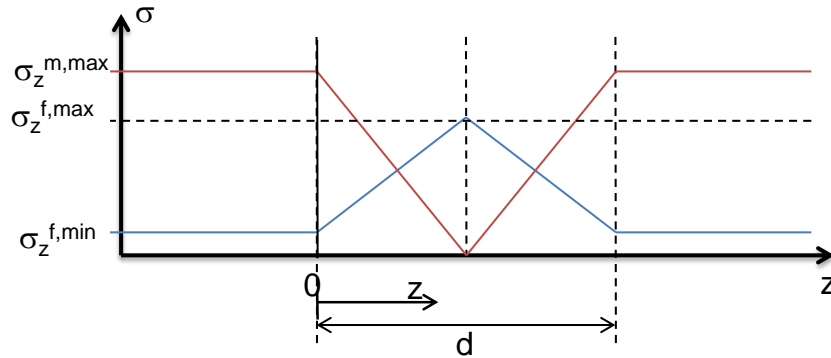


Figure F-3 – Modélisation linéaire du transfert de charge axial entre la fibre et la matrice le long du microcomposite z (relation 2.1). Les contraintes dans la fibre et dans la matrice retrouvent les valeurs $\sigma_z^{m,max}$ et $\sigma_z^{f,min}$ au delà de la longueur de décohésion d . L'énergie de rupture de l'interface n'est pas considérée dans cette illustration ($G_i^c = 0$), ce qui se traduit par l'absence de saut de contrainte à l'extrémité de la décohésion.

L'analyse est réalisée cette fois-ci directement en prenant en compte les contraintes résiduelles. En répétant le même raisonnement que précédemment, le déplacement axial $U_{méca}$ appliqué sur le microcomposite s'écrit alors

$$U_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} (L - d) - A \frac{\sigma^T}{E_0} (L - d) + 2 \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} dz + A \frac{\sigma^T}{E_0} L \quad (F-25)$$

$$\text{avec } U_{total,endo} = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} dz ,$$

où σ_z^f est la contrainte axiale supportée par la fibre le long de la zone de décohésion. La contrainte σ est la contrainte axiale appliquée sur le microcomposite. Le déplacement total le long de la zone de décohésion, noté $U_{total,endo}$, s'exprime comme la somme de la déformation axiale dans la fibre. On rappelle que le coefficient A est donné [Équation F-18](#).

La relation d'équilibre au sein de la fibre dans la direction axiale sous le front de décohésion ([figure F-4](#)) est

$$\frac{\partial \sigma_z^f(z)}{\partial z} = \frac{2\tau}{R_f} \quad \text{avec} \quad \sigma_z^f(z=0) = \sigma_z^{f,max}(\sigma) . \quad (F-26)$$

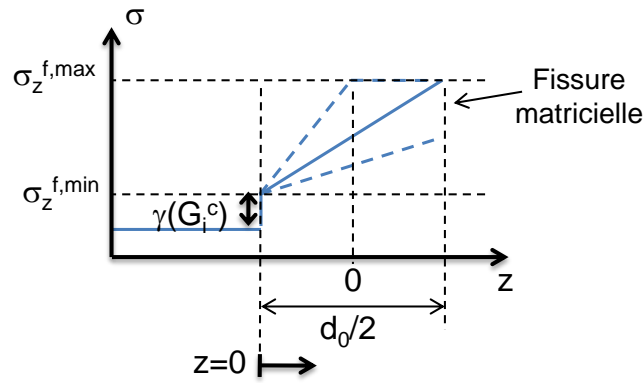


Figure F-4 – Evolution linéaire de la contrainte dans la fibre dans la zone de décohésion en fonction de la valeur du cisaillement interfacial.

Evolution de la longueur de décohésion en fonction du chargement appliqué σ et du cisaillement interfacial caractéristique τ

Le maximum de contrainte axiale supportée par la fibre le long de la décohésion est $\sigma_z^{f,max}(\sigma) = \frac{\sigma}{V_f}$. On note d_0 la longueur de décohésion telle que la contrainte axiale supportée par la fibre $\sigma_z^f\left(z = \frac{d_0}{2}\right) = \sigma_z^{f,min}(\sigma)$. La distance $d_0(\sigma)$ dépend du cisaillement interfacial τ par la relation

$$d_0(\sigma) = R_f \frac{\frac{\sigma}{V_f} - \sigma_z^{min}(\sigma)}{\tau} . \quad (F-27)$$

Expression de la contrainte $\sigma_z^{f,min}$

La contrainte $\sigma_z^{f,min}(\sigma)$ en $z = \frac{d_0}{2}$ dépend du chargement axial σ , des contraintes résiduelles et de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Un $G_i^c > 0$ entraîne un saut de contrainte dans la fibre à l'extrémité de la décohésion interfaciale (figure 2.2, chapitre 2 page 77).

Les développements précédents ont permis de montrer que

$$\sigma_z^{f,min}(\sigma) = a_1 \sigma + \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^{ci} \quad \text{avec} \quad \sigma^{ci} = \frac{1}{c_1} \left(\frac{E_m G_i^c}{R_f} \right)^{\frac{1}{2}} - \sigma^T , \quad (F-28)$$

où la contrainte σ^{ci} dépend de G_i^c et correspond au chargement axial nécessaire pour amorcer la décohésion interfaciale. Le coefficient c_1 a aussi été introduit au chapitre 2 (Équation C-4) et dépend des caractéristiques du microcomposite.

Le saut de contrainte $\gamma(G_i^c)$ dépend du chargement critique qui permet de propager la décohésion sans frottement. Ce saut de contrainte est nul si $G_i^c = 0$. La relation avec la contrainte axiale, lors du début de propagation de la décohésion, est

$$\sigma^{ci} = \frac{V_f}{1 - a_1 V_f} \gamma - \sigma^T . \quad (F-29)$$

Donc la contrainte $\sigma_z^{f,min}(\sigma)$ peut encore s'écrire

$$\sigma_z^{f,min}(\sigma) = \frac{E_f}{E_0} \sigma - \frac{E_f}{E_0} A \sigma^T + \gamma(G_i^c) . \quad (F-30)$$

Justification du saut de contrainte γ

Deux expressions de la contrainte σ_z^f sont obtenues suivant les deux cas (figure F-4) :

$$\sigma_z^f(z) = \begin{cases} \sigma_z^{f,min}(\sigma) + 2\tau \frac{z}{R_f} & \text{si } d \leq d_0 \text{ ou } z \leq \frac{d_0}{2} \\ \frac{\sigma}{V_f} & \text{si } d > d_0 \text{ et } z > \frac{d_0}{2} \end{cases} . \quad (\text{F-31})$$

Le modèle avec un cisaillement constant permet d'écrire que la différence de contrainte dans la fibre le long de la décohésion est

$$\frac{\sigma}{V_f} - \frac{E_f}{E_0} \sigma - \gamma = \frac{d}{R_f} \tau , \quad (\text{F-32})$$

$$\text{donc } \sigma = \frac{E_0}{E_f A} \tau \frac{d}{R_f} + \frac{E_0}{E_f} \frac{\gamma}{A} . \quad (\text{F-33})$$

Etant donné que sans frottement la décohésion d se propage lorsque le chargement en contrainte $\sigma = \sigma^{ci}$, on en déduit que

$$\frac{E_0}{E_f} \frac{\gamma}{A} = \sigma^{ci} . \quad (\text{F-34})$$

Le saut de contrainte γ s'exprime alors par

$$\gamma = \frac{E_f A}{E_0} \sigma^{ci} \quad \text{soit} \quad \gamma = \frac{E_f A}{E_0} \left(\frac{4V_f E_0}{AR_f} G_i^c \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (\text{F-35})$$

Expression de la déformation axiale

En reprenant les équations F-25, F-31 et F-27 on en déduit la déformation axiale

$$\varepsilon_{méca} = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} + \frac{\sigma_z^{f,min}}{E_f} \frac{d}{L} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L} & \text{si } d \leq d_0 \\ \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} + \frac{\sigma}{V_f E_f} \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \frac{R_f}{LE_f \tau} \left(\frac{\sigma}{V_f} - \sigma_z^{f,min} \right)^2 & \text{si } d \geq d_0 \end{cases} . \quad (\text{F-36})$$

Finalement, l'expression générale de la déformation axiale en présence de contraintes résiduelles et du saut de contrainte dans la fibre en pointe de décohésion s'obtient en utilisant la contrainte supportée par la fibre à l'extrémité de la décohésion $\sigma_z^{f,min}(\sigma)$ (Équation F-30) ce qui donne

$$\varepsilon_{méca} = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\gamma}{E_f} \frac{d}{L} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L} & \text{si } d \leq d_0 \\ \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + A \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \frac{R_f E_f}{L \tau} \left(A \frac{\sigma + \sigma^T}{E_0} - \gamma \right)^2 & \text{si } d \geq d_0 \end{cases} . \quad (\text{F-37})$$

En observant le cas $d \leq d_0$ et si $\tau = 0$ et le saut de contrainte $\gamma = 0$, cela revient à des contraintes axiales dans la fibre et la matrice constantes et égales aux contraintes loin de la zone fissurée. Il n'y a pas de rerépartition des contraintes due à la présence de fissures et l'Équation F-37 donne alors $\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0}$ qui est la déformation axiale de **microcomposite sain**. De plus on remarque que les contraintes résiduelles n'apparaissent pas dans l'expression si $d \leq d_0$.

La deuxième expression correspondant à $d \geq d_0$ permet de retrouver l'expression de la déformation axiale en l'absence de frottement : si $\tau \rightarrow \infty$, à l'extrémité de la décohésion la contrainte axiale présente un saut de contrainte et la fibre supporte tous les efforts de traction dans toute la zone de décohésion. La répartition des contraintes est alors celle du microcomposite sans frottement et l'Équation F-37 fournit le déplacement axial du **microcomposite sans frottement**. On reconnaît la décohésion sous la forme d'un terme de déformation élastique de module $E(L, d)$ (F-19) et de déformations résiduelles (F-24).

Expression de la déformation axiale et critère de décohésion

L'expression de la déformation axiale (Équation F-37) a été établie en choisissant une longueur de décohésion d quelconque et indépendante du critère de décohésion $d = d_0(\sigma)$ (F-27). Ce paragraphe a trois objectifs :

- s'assurer de la continuité pour $d = d_0(\sigma)$ des deux relations de l'Équation F-37,
- présenter une expression de la déformation $\varepsilon_{méca}$ en fonction du cisaillement et de la décohésion $d = d_0(\sigma)$,
- établir la déformation $\varepsilon_{méca}$ directement en fonction du chargement σ sous la condition $d = d_0(\sigma)$.

En choisissant la longueur de décohésion $d = d_0(\sigma)$ telle que le critère de propagation soit satisfait, il est possible d'écrire autrement la déformation axiale à partir de d . La contrainte dans la fibre est croissante depuis l'extrémité de la décohésion jusqu'à atteindre $\frac{\sigma}{V_f}$ au niveau de la fissure matricielle. Dans ce cas, la contrainte dans la fibre peut encore s'écrire en changeant d'origine

$$\sigma_z^f(z) = \frac{\sigma}{V_f} - 2\tau \frac{z}{R_f} \quad \text{si } d = d_0, \quad (\text{F-38})$$

où $z = 0$ correspond à la pointe de fissure matricielle et $z = \frac{d}{2}$ est l'extrémité de la décohésion. En reprenant le raisonnement précédent, la déformation axiale peut aussi s'écrire

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + A \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L} \quad \text{si } d = d_0. \quad (\text{F-39})$$

Avec la présence du frottement à l'interface, il est difficile de dissocier la déformation appliquée sur le microcomposite au cours de la traction monotone en une déformation élastique et une déformation résiduelle. En présence de frottement le déchargement n'est pas linéaire. Néanmoins on peut décomposer la déformation $\varepsilon_{méca}$ suivant un terme proportionnel avec le chargement σ et un terme fixe :

- on reconnaît le terme proportionnel à σ sous la forme

$$\frac{\sigma}{E_0} \left[1 + \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \frac{d}{L} \right], \quad (\text{F-40})$$

puisque le coefficient $A = \frac{E_0}{V_f E_f} - 1$. Ce terme fait intervenir le module moyen $E(L, d)$ du microcomposite endommagé approché précédemment en l'absence de frottement (Équation F-19). Etant donné qu'on souhaite analyser le comportement en traction monotone, on généralise ce module $E(L, d)$ au microcomposite avec glissement frottant comme étant un **module élastique apparent**. Cet abus de langage permet de comparer le comportement avec et sans présence de frottement : on remarque que ce **module élastique apparent** $E(L, d)$ est indépendant du cisaillement τ .

- de même, on identifie le deuxième terme à des **déformations résiduelles apparentes** $\varepsilon_r(L, d)$ avec

$$\varepsilon_r(L, d) = \left(\frac{E_0}{V_f E_f} - 1 \right) \frac{d}{L} \frac{\sigma^T}{E_0} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{E_f} \frac{d^2}{R_f L}, \quad (\text{F-41})$$

où les déformations résiduelles résultantes des précontraintes d'origine thermique sont diminuées d'un deuxième terme dépendant du cisaillement τ . La présence de frottement réduit ces déformations résiduelles apparentes qui peuvent même être négatives si les contraintes résiduelles sont nulles par exemple.

Les deux expressions de l'Équation F-37 donnent la déformation axiale si $d \leq d_0$ et si $d \geq d_0$. Pour $d = d_0(\sigma)$, en remplaçant d par l'Équation F-27, on montre que ces deux expressions donnent bien la même relation

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} + \frac{R_f E_f}{2L\tau} \left[\left(A \frac{\sigma + \sigma^T}{E_0} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{E_f} \right)^2 \right]. \quad (\text{F-42})$$

La longueur de décohésion $d = d_0(\sigma)$ n'apparaît plus dans l'expression de la déformation axiale. On obtient la déformation $\varepsilon_{méca}$ simplement en fonction de σ^2 . De plus, la plupart des auteurs utilisant ce modèle de rechargement linéaire considèrent une énergie de rupture nulle, donc aucun saut de contrainte. Les contraintes résiduelles ne sont également pas prises en compte. Dans ce cas, la déformation axiale se simplifie par

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + A \frac{R_f E_f}{2L\tau} \frac{\sigma}{E_0} \right). \quad (\text{F-43})$$

Ouverture de la fissure matricielle

L'ouverture de la fissure matricielle revient à calculer le déplacement relatif entre la fibre et la matrice au niveau de la fissure matricielle. Le déplacement relatif le long de l'interface frottante, noté $\Delta U(z)$, s'exprime comme la différence de déplacement axial entre la fibre $U_z^f(z) = \int_0^z \varepsilon_z^f(\eta) d\eta$ et la matrice $U_z^m(z) = \int_0^z \varepsilon_z^m(\eta) d\eta$ soit

$$\Delta U(z) = \int_0^z \frac{\sigma_z^f(\eta)}{E_f} d\eta - \int_0^z \frac{\sigma_z^m(\eta)}{E_m} d\eta \quad \text{pour } z \in \left[0, \frac{d}{2} \right]. \quad (\text{F-44})$$

Le déplacement relatif $\Delta U(z = 0) = 0$ en pointe de décohésion. Le déplacement relatif $\Delta U\left(z = \frac{d}{2}\right)$ au niveau de la fissure matricielle est égal à **la demie ouverture de fissure**.

En utilisant la relation $\sigma_z^f V_f + \sigma_z^m (1 - V_f)$ on obtient

$$\Delta U(z) = \int_0^z \left\{ \sigma_z^f(\eta) \frac{E_0}{A V_f E_f^2} - \frac{\sigma}{E_m} (1 - V_f) \right\} d\eta \quad \text{si } d \leq d_0, \quad (\text{F-45})$$

le coefficient A étant défini par F-18.

La contrainte axiale dans la fibre $\sigma_z^f(z)$ est décrite par l'Équation F-31. En tenant compte du saut de contrainte à l'extrémité de la décohésion, cela devient

$$\sigma_z^f(z) = \frac{E_f}{E_0} (\sigma - A \sigma^T) + \gamma + 2\tau \frac{z}{R_f} \quad \text{si } d \leq d_0, \quad (\text{F-46})$$

en utilisant la contrainte dans la fibre $\sigma_z^{f,min}$ (F-30).

Après intégration, on obtient

$$\Delta U(z) = \frac{E_0 \tau}{AV_f E_f^2} \frac{z^2}{R_f} + \frac{1}{V_f E_f} \left(\frac{E_0}{AE_f} \gamma - \sigma^T \right) z \quad \text{si } d \leq d_0. \quad (\text{F-47})$$

L'ouverture de la fissure matricielle s'obtient par

$$2\Delta U \left(z = \frac{d}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{E_0 \tau}{AV_f E_f^2} \frac{d^2}{R_f} + \frac{1}{V_f E_f} \left(\frac{E_0}{AE_f} \gamma - \sigma^T \right) d \quad \text{si } d \leq d_0. \quad (\text{F-48})$$

Si le cisaillement $\tau = 0$ et si le saut de contrainte $\gamma = 0$, la répartition des contraintes entre la fibre et la matrice reste uniforme. Le déplacement axial de la matrice est identique à celui de la fibre. C'est le cas du frottement très intense. En effet l'Équation F-48 donne une ouverture de fissure nulle comme dans le cas du microcomposite sain.

Le même développement est réalisé pour traiter le cas d'une longueur de décohésion $d \geq d_0$. En considérant l'expression de la contrainte dans la fibre (F-31), le déplacement relatif fibre/matrice devient

$$\Delta U(z) = \int_0^{\frac{d_0}{2}} \left\{ \sigma_z^f(\eta) \frac{E_0}{AV_f E_f^2} - \frac{\sigma}{E_m} (1 - V_f) \right\} d\eta + \int_{\frac{d_0}{2}}^z \frac{\sigma}{V_f E_f} d\eta \quad \text{si } d \geq d_0 \text{ et } z \geq d_0, \quad (\text{F-49})$$

soit

$$\Delta U(z) = \frac{1}{4} \frac{E_0 \tau}{AV_f E_f^2} \frac{d_0^2}{R_f} + \frac{1}{V_f E_f} \left(\frac{E_0}{AE_f} \gamma - \sigma^T \right) \frac{d_0}{2} + \frac{\sigma}{V_f E_f} \left(z - \frac{d_0}{2} \right) \quad \text{si } d \geq d_0 \text{ et } z \geq d_0. \quad (\text{F-50})$$

Or en remplaçant la contrainte $\sigma_z^{f,min}$ (F-27) dans la décohésion critique d_0 (F-27), on obtient

$$d_0(\sigma) = \frac{R_f}{\tau} \left(\frac{E_f}{E_0} A(\sigma + \sigma^T) - \gamma \right), \quad (\text{F-51})$$

donc après simplification

$$\Delta U(z) = \frac{\sigma}{V_f E_f} z - \frac{1}{4} \frac{E_0}{AV_f E_f^2} \frac{R_f}{\tau} \left(\frac{E_f}{E_0} A(\sigma + \sigma^T) - \gamma \right) \quad \text{si } d \geq d_0 \text{ et } z \geq d_0. \quad (\text{F-52})$$

Alors l'ouverture de la fissure matricielle s'exprime par

$$2\Delta U \left(z = \frac{d}{2} \right) = \frac{\sigma}{V_f E_f} d - \frac{1}{2} \frac{E_0}{AV_f E_f^2} \frac{R_f}{\tau} \left(\frac{E_f}{E_0} A(\sigma + \sigma^T) - \gamma \right) \quad \text{si } d \geq d_0. \quad (\text{F-53})$$

Si le cisaillement interfacial $\tau \rightarrow \infty$, on observe un saut de contrainte axial dans la fibre au niveau de l'extrémité de la décohésion. Dans ce cas $\sigma_z^{f,min}$ à la valeur $\frac{\sigma}{V_f}$, donc l'ouverture de la fissure matricielle est celle du microcomposite sans frottement. En effet, dans ces conditions $2\Delta U \left(z = \frac{d}{2} \right) = \frac{\sigma}{V_f E_f}$ est l'ouverture de la fissure matricielle du microcomposite sans frottement.

Bien sûr les deux expressions de l'ouverture de fissure matricielle (F-48) et (F-53) donnent une relation identique si on choisit la longueur de décohésion $d = d_0(\sigma)$.

**Déformation appliquée sur le microcomposite contenant une fissure matricielle
et une décohésion interfaciale en présence de frottement :
modèle de frottement de Coulomb – zone transitoire négligée**

Il est plus réaliste de considérer le frottement par la loi de Coulomb

$$\tau(\sigma, z) = -\mu\sigma_r(\sigma, z), \quad (\text{F-54})$$

en fonction de la contrainte radiale à l'interface $\sigma_r(\sigma, z)$ le long de l'interface z et du coefficient de frottement μ . De façon analogue, la contrainte radiale à l'extrémité de la décohésion interfaciale est notée σ_r^{min} .

Au cours du chapitre 2 nous avons utilisé les relations de Hutchinson et Jensen pour exprimer la répartition des contraintes dans le microcomposite. La résolution des équations d'élasticité a permis d'établir des expressions des contraintes et déformations en formulant une série de coefficients dépendant des caractéristiques mécaniques du microcomposite (Annexe page 222). Pour considérer le frottement de Coulomb, on souhaite utiliser la relation entre la contrainte axiale dans la fibre et la contrainte radiale par

$$\Delta\sigma_r = b_1\Delta\sigma_z^f \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\sigma_r(z) = \sigma_r(z) - \left(a_3\sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T \right) \\ \Delta\sigma_z^f(z) = \sigma_z^f(z) - \left(a_1\sigma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \right) \end{cases}, \quad (\text{F-55})$$

le coefficient b_1 étant aussi formulé en annexe page 222.

La contrainte radiale au niveau de la pointe de décohésion, notée σ_r^{min} , peut s'obtenir par

$$\sigma_r^{min} = a_3\sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T \quad \text{si} \quad G_i^c = 0. \quad (\text{F-56})$$

Les coefficients de Hutchinson et Jensen a_3 et a_4 sont exprimés en annexe 222. La contrainte radiale σ_r^{min} dépend du chargement axial σ et des contraintes résiduelles σ^T . Le premier terme dépend de la différence de dilatation radiale entre la fibre et la matrice due à la traction axiale. Ce premier terme est alors nul si le coefficient de Poisson de la fibre est identique à celui de la matrice et le coefficient $a_3 = 0$. Dans ce cas particulier, seules les contraintes résiduelles provoquent le maintien du contact fibre/matrice à l'interface et donc le frottement.

En présence du saut de contrainte γ dans la fibre à l'extrémité de la décohésion, la contrainte radiale à l'interface à l'extrémité de la décohésion devient

$$\sigma_r^{min} = a_3\sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T + b_1\gamma. \quad (\text{F-57})$$

La contrainte dans la fibre à l'extrémité de la décohésion (F-30) s'écrit toujours

$$\sigma_z^{f,min} = a_1\sigma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \sigma^T + \gamma. \quad (\text{F-58})$$

A l'aide de ces relations, on souhaite déterminer la contrainte dans la fibre le long de la zone de décohésion $\sigma_z^f(z)$. En utilisant l'Équation F-55 ainsi que la relation d'équilibre

$$\frac{\partial\sigma_z^f(z)}{\partial z} = \frac{2}{R_f}\tau \quad \text{avec} \quad \sigma_z^f(z=0) = \sigma_z^{f,min}, \quad (\text{F-59})$$

on obtient

$$\frac{\partial \Delta \sigma_z^f}{\partial z} = -\frac{2\mu}{R_f} \left(a_3 \sigma - a_4 \frac{1 - a_1 V_f}{a_2 V_f} \sigma^T \right). \quad (\text{F-60})$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$\Delta \sigma_z^f = \gamma - \frac{\sigma_r^{min}}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{2\mu b_1}{R_f} z} \right). \quad (\text{F-61})$$

La condition pour $z = 0$ a été utilisée. La contrainte dans la fibre σ_z s'écrit alors

$$\sigma_z^f(z) = \sigma_z^{f,min} - \frac{\sigma_r^{min}}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{2\mu b_1}{R_f} z} \right). \quad (\text{F-62})$$

Loi de propagation de la décohesion

D'une part, on note la décohesion $d_0(\sigma)$ telle que la contrainte dans la matrice au niveau de la fissure matricielle soit nulle, ou encore la contrainte dans la fibre au niveau de la fissure matricielle soit égale à $\sigma_z^f \left(z = \frac{d}{2} \right) = \frac{\sigma}{V_f}$, ce qui donne

$$\frac{\sigma}{V_f} = \sigma_z^{f,min} - \frac{\sigma_r^{min}}{b_1} \left(1 - e^{-\frac{\mu b_1}{R_f} d_0} \right). \quad (\text{F-63})$$

Après développement, la décohesion $d_0(\sigma)$ se détermine par

$$\frac{d_0(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\mu b_1} \ln \left(\frac{V_f \sigma_r^{min}}{b_1 \sigma - b_1 V_f \sigma_z^{f,min} + V_f \sigma_r^{min}} \right). \quad (\text{F-64})$$

D'autre part en suivant le raisonnement de Hutchinson et Jensen, il est possible de déterminer la contrainte axiale notée σ_0 à partir de laquelle la contrainte radiale au niveau de la fissure matricielle $\sigma_r \left(z = \frac{d}{2} \right) = 0$.

Lorsque $z = \frac{d}{2}$, la contrainte $\Delta \sigma_z^f$ définie par l'Équation F-55 s'écrit

$$\Delta \sigma_z^f = \frac{\sigma}{V_f} - a_1 \sigma + \frac{1 - a_1}{V_f} \sigma^T \quad \text{soit} \quad \Delta \sigma_z^f = \frac{1 - a_1}{V_f} (\sigma + \sigma^T). \quad (\text{F-65})$$

La contrainte $\Delta \sigma_r$ devient alors

$$\Delta \sigma_r = b_1 \frac{1 - a_1}{V_f} (\sigma + \sigma^T), \quad (\text{F-66})$$

on en déduit la contrainte radiale en $z = \frac{d}{2}$

$$\sigma_r \left(z = \frac{d}{2} \right) = b_1 \frac{1 - a_1}{V_f} (\sigma + \sigma^T) + a_3 \sigma - \frac{a_4}{a_2} \frac{1 - a_1}{V_f} \sigma^T. \quad (\text{F-67})$$

Enfin, la contrainte axiale $\sigma = \sigma_0$ lorsque $\sigma_r \left(z = \frac{d}{2} \right) = 0$ est

$$\sigma_0 = \frac{(1 - a_1 V_f)(a_4 - a_2 b_1)}{a_2(b_1(1 - a_1 V_f) + a_3 V_f)} \sigma^T. \quad (\text{F-68})$$

Après de nouveaux développements, la contrainte radiale σ_r^{min} peut s'écrire en fonction de la contrainte σ_0 et σ^{ci} par

$$\sigma_r^{min} = -b_1 \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} \left(\sigma_0 - \sigma^{ci} + k_1 (\sigma_0 - \sigma) \right) \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{V_f}{1 - a_1 V_f} \frac{a_3}{b_1}. \quad (\text{F-69})$$

On souhaite écrire la longueur de décohérence $d_0(\sigma)$ en fonction de σ_0 et de la contrainte σ^{ci} lors du début de propagation de la décohérence interfaciale.

En observant que

$$\sigma - V_f \sigma_z^{f,min} = (1 - a_1 V_f) (\sigma - \sigma^{ci}), \quad (\text{F-70})$$

et en utilisant les relations F-64 et F-69, on obtient finalement

$$\frac{d_0(\sigma)}{R_f} = \frac{1}{\mu b_1} \ln \left[\frac{1}{k_1 + 1} \frac{\sigma_0 - \sigma^{ci} + k_1 (\sigma_0 - \sigma)}{(\sigma_0 - \sigma)} \right]. \quad (\text{F-71})$$

Lorsque la contrainte axiale $\sigma = \sigma^{ci}$, on obtient bien $d_0(\sigma = \sigma^{ci}) = 0$, la contrainte σ^{ci} étant la contrainte à l'amorçage de la décohérence.

Puis lorsque le chargement atteint $\sigma = \sigma_0$, la relation F-71 donne une décohérence tendant vers l'infini.

Expression de la déformation axiale du microcomposite

La déformation axiale $\varepsilon_{méca}$ s'exprime toujours par la relation (F-25)

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} \left(1 - \frac{d}{L} \right) + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} + 2 \frac{1}{L} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} dz, \quad (\text{F-72})$$

où la contrainte dans la fibre σ_z^f est exprimée par l'Équation F-62 si la longueur de décohérence $d \leq d_0(\sigma)$. Si $d \geq d_0(\sigma)$, alors

$$\sigma_z^f(z) = \frac{\sigma}{V_f} \quad \text{si} \quad d \geq d_0(\sigma) \quad \text{et} \quad z \in \left[\frac{d_0}{2}, \frac{d}{2} \right], \quad (\text{F-73})$$

puisque la matrice est déchargée dans cette zone.

On traite en premier le cas $d \leq d_0(\sigma)$. Après intégration on obtient

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \sigma_z^f(z) dz = \sigma_z^{f,min} \frac{d}{2} - \frac{\sigma_r^{min}}{b_1} \frac{d}{2} + \frac{R_f \sigma_r^{min}}{2 \mu b_1^2} \left(1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right) \quad \text{si} \quad d \leq d_0(\sigma). \quad (\text{F-74})$$

En utilisant les expressions de $\sigma_z^{f,min}$ (F-58) et σ_r^{min} (F-57), la déformation axiale s'exprime par

$$\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} - \frac{1}{b_1} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} \right) \frac{d}{L} + \frac{R_f}{\mu b_1^2 L} \left(a_3 \frac{\sigma}{E_f} - A \frac{a_4}{a_2} \frac{\sigma^T}{E_0} + b_1 \frac{\gamma}{E_f} \right) \left(1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right) \quad \text{si} \quad d \leq d_0(\sigma). \quad (\text{F-75})$$

Pour le deuxième cas $d \geq d_0(\sigma)$, on aura besoin d'exprimer la longueur de décohesion $d_0(\sigma)$ (F-71) en utilisant les contraintes σ_0 (F-68) et σ^{ci} (F-29). On obtient

$$\frac{d_0}{R_f} = \frac{1}{\mu R_f} \ln \left(\frac{V_f a_3 \sigma - \frac{a_4}{a_2} (1 - a_1 V_f) \sigma^T + V_f b_1 \gamma}{b_1 (1 - a_1 V_f) (\sigma + \sigma^T) + V_f a_3 \sigma - \frac{a_4}{a_2} (1 - a_1 V_f) \sigma^T} \right). \quad (\text{F-76})$$

Il est nécessaire de décomposer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \sigma_z^f(z) dz = \int_0^{\frac{d_0}{2}} \sigma_z^f(z) dz + \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} \sigma_z^f(z) dz. \quad (\text{F-77})$$

Après développement, la déformation axiale s'exprime par

$$\boxed{\varepsilon_{méca} = \frac{\sigma}{E_0} (1 + A) \frac{d}{L} + A \frac{\sigma^T}{E_0} \frac{d}{L} - \left[\frac{(1 - a_1 V_f) (\sigma + \sigma^T)}{V_f E_f} + \frac{a_3}{b_1} \frac{\sigma}{E_f} - \frac{a_4}{b_1 a_2} \frac{(1 - a_1 V_f) \sigma^T}{V_f E_f} \right] \frac{d_0}{L} + \frac{R_f}{L} \frac{1}{\mu b_1} \frac{1}{E_f} \left[\gamma - \frac{1 - a_1 V_f}{V_f} (\sigma + \sigma^T) \right] \quad \text{si } d \geq d_0(\sigma).}$$

(F-78)

Ouverture de la fissure matricielle

Il convient à nouveau de déterminer le déplacement relatif fibre/matrice $\Delta U(z)$ donné par la relation (F-45). On en déduit l'ouverture de la fissure matricielle

$$2\Delta U\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{E_0}{AV_f E_f^2} \left(\sigma^{f,min} - \frac{\sigma_r^{min}}{b_1} \right) d - \frac{\sigma}{E_m} (1 - V_f) d + \frac{R_f}{\mu b_1^2} \frac{\sigma_r^{min} E_0}{AV_f E_f^2} \left[1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right] \quad \text{si } d \leq d_0(\sigma), \quad (\text{F-79})$$

puis finalement

$$\boxed{2\Delta U\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{E_0}{AV_f E_f^2} \left[A \frac{E_f}{E_0} \left(\frac{a_4}{b_1 a_2} - 1 \right) \sigma^T - \frac{a_3}{b_1} \sigma \right] d + \frac{R_f}{\mu b_1^2} \frac{\sigma_r^{min} E_0}{AV_f E_f^2} \left[1 - e^{-\mu b_1 \frac{d}{R_f}} \right] \quad \text{si } d \leq d_0(\sigma).}$$

(F-80)

Annexe G

Modèle de minicomposite en traction par discrétisation de la matrice : Schéma de résolution

Cette annexe fait l'objet de la **multifissuration de la matrice** au sein du minicomposite sollicité en traction. On souhaite modéliser l'amorçage progressif de chacune des fissures matricielles en discrétisant le volume de matrice en plusieurs bloc. Le minicomposite est alors représenté par la cellule élémentaire de longueur L_0 divisée en blocs indépendants de même taille. Une contrainte à rupture de la matrice est attribuée à chaque bloc. Ces contraintes sont notées σ_{max} .

Il s'agit de modéliser la courbe contrainte déformation (σ / ϵ) résultant de l'endommagement du minicomposite en traction. La propagation de la décohésion interfaciale $d(\sigma)$ est également considérée et dépend de l'énergie de rupture G_i^c et du coefficient de frottement μ .

Pour cela, **on utilise les relations du modèle semi-analytique** développé au cours du [chapitre 2](#) (p. 107) : l'évolution de la décohésion interfaciale $d(\sigma)$ (2.34) et la déformation axiale $\epsilon(\sigma, L, d)$ (2.35).

La déformation axiale $\epsilon(\sigma, L, d)$ dépend du pas de fissuration matricielle, noté L . Celui-ci doit être calculé à partir du nombre de fissures créées au cours du chargement de traction.

L'amorçage successif des fissures est simulé à l'aide d'un algorithme dont les principales étapes sont présentées dans le [tableau G-1](#). On considère que le chargement de traction est imposé en déformation. Pour calculer la contrainte et la déformation appliquée au cours de la multifissuration du minicomposite, il est nécessaire de mettre en œuvre simultanément plusieurs étapes déjà analysées :

1. Condition d'amorçage des fissures matricielles, multifissuration
2. Condition de propagation de la décohésion
3. Calcul de la contrainte et déformation appliquée à chaque état d'endommagement
4. Calcul de la chute de contrainte juste après l'amorçage de chaque fissure matricielle
5. Effet d'écran lié à la présence des décohésions.

Conditions d'amorçage des fissures matricielles

Le minicomposite est divisé en n_{bloc} et les contraintes à rupture de la matrice σ_{max} sont attribués à chacun des blocs. Dans le bloc i , la fissure matricielle peut être amorcée à condition que la contrainte axiale supportée par la matrice σ_z^m atteigne la valeur $\sigma_{max}(i)$.

Dans les zones endommagées du minicomposite, la matrice est déchargée localement et il est possible qu'un défaut n'entraîne jamais la création de fissure. On appelle alors **potentielle fissure matricielle** le défaut présent dans la matrice dont l'amorçage est gouverné par la contrainte à rupture $\sigma_{max}(i)$ et la contrainte σ_z^m supportée par la matrice localement.

La contrainte axiale dans la matrice est homogène dans les zones saines du minicomposite et de valeur plus faible dans les zones déchargées autour des fissures matricielle. La distance de déchargement $d_r(\sigma, d)$, déjà analysée, dépend de la contrainte appliquée σ et de la longueur de décohésion d .

Au cours de la traction du minicomposite, la condition d'amorçage $\sigma_z^m \geq \sigma_{max}(i)$ de la nouvelle fissure matricielle peut se résumer en deux points :

- la contrainte axiale de la matrice dans la zone saine doit atteindre la contrainte à rupture σ_{max} de la nouvelle potentielle fissure,
- et la nouvelle fissure est positionnée en dehors des zones de déchargement données par la distance $d_r(\sigma, d)$ et la position des fissures précédentes.

La contrainte appliquée $\sigma^c(i)$ sur le minicomposite, permettant d'amorcer la fissure potentielle au sein du bloc i se détermine par

$$\sigma^c(i) = \sigma_{max}(i) \frac{1 - V_f}{1 - a_1 V_f} - \sigma^T, \quad (G-1)$$

où σ^T représente la contrainte résiduelle et a_1 est un coefficient caractéristique du minicomposite (Équation 1.78 p. 68). Les contraintes σ_{max} et σ^c représentent les listes des valeurs des contraintes attribuées à chaque bloc i . La séquence d'amorçage des fissures dans le minicomposite dépend des valeurs des contraintes σ_{max} ou σ^c autorisant la création des potentielles fissures dans chacun des blocs successivement.

Pour mettre en œuvre l'algorithme de résolution du minicomposite en traction, on propose de déterminer le bloc i contenant la nouvelle fissure par deux conditions :

- le bloc i correspond à la contrainte σ^c minimale ($\sigma^c(i) = \min(\sigma^c)$) parmi les blocs de matrice qui n'ont pas encore été étudiés,
- et la nouvelle fissure est positionnée en dehors des zones de déchargement données par la distance $d_r(\sigma^c(i), d)$ et la position des anciennes fissures.

Condition de propagation de la décohésion

L'amorçage de la fissure matricielle peut s'accompagner d'une décohésion interfaciale. Cela dépend des propriétés à rupture de la matrice (contrainte σ_{max}) et de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . L'analyse précédente a permis d'exprimer la contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale à partir de G_i^c (Équation 1.80 p. 69). Une comparaison de σ^{ci} avec la contrainte appliquée $\sigma^c(i)$ à l'amorçage de la fissure matricielle dans le bloc i montre si la décohésion accompagne la fissure matricielle. Dès lors, si $\sigma^c(i) \geq \sigma^{ci}$ alors la nucléation de la fissure matricielle entraîne également la décohésion à l'interface. Cette condition est vérifiée pour les parties A2 et B de l'algorithme présenté (tableau G-1).

Finalement, une première partie de cet algorithme du minicomposite en traction (**partie A**, tableau G-1) consiste d'abord à déterminer les valeurs de σ et ε lors de l'amorçage de la fissure matricielle sans décohésion et à déterminer le début de la propagation de la décohésion. Cela dépend des valeurs des contraintes à rupture de la matrice σ_{max} et de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . La **partie B** s'attache à la détermination de σ et ε lors de l'amorçage de la fissure matricielle en présence de décohésion.

Propriétés mécaniques du minicomposite endommagé

L'algorithme développé permet d'évaluer le pas de fissuration moyen L qui dépend du nombre de fissures matricielles $n_{fissures}$ créées aléatoirement dans les blocs

$$L = \frac{L_0}{n_{fissures} + 1} . \quad (G-2)$$

La déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$ est calculée à partir du pas de fissuration moyen L et de la longueur de décohérence $d(\sigma)$. Les **fissures sont réparties aléatoirement** mais l'analyse présentée (chapitre 2, III.3 page 62) a confirmé que les propriétés mécaniques du minicomposite ne dépendent pas de la répartition des fissures si elle sont espacées d'au moins $3R_f$.

D'autre part, si les fissures matricielles sont déviées à l'interface, on montre que pour une contrainte appliquée σ croissante, la propagation de la longueur de décohérence $d(\sigma)$ est identique autour de chacune des fissures matricielles.

Cependant on peut se demander quelle serait la **valeur du module élastique du minicomposite sous hypothèse que les décohésions sont de longueurs différentes** autour de chaque fissure matricielle. On note d_k la longueur de la décohérence autour de la fissure k pour $k \in [1; n_{fissures}]$. On s'intéresse à la longueur de décohérence moyenne d_{moy} défini par

$$d_{moy} = \frac{1}{n_{fissures}} \sum_{k=1}^{n_{fissures}} d_k . \quad (G-3)$$

En utilisant l'expression du module $E(L, d)$, on peut montrer que le module du minicomposite constitué de décohésions de longueurs différentes d_k est identique au module longitudinal $E(L, d_{moy})$ déterminé en fonction de la longueur de décohérence moyenne d_{moy} . Il suffit de montrer que

$$n_{fissures} L \frac{1}{E(L, d_{moy})} = L \sum_{k=1}^{n_{fissures}} \frac{1}{E(L, d_k)} , \quad (G-4)$$

où L est le pas de fissuration. L'expression du module permet d'écrire

$$\frac{1}{E(L, d)} = \frac{1}{E_0} \left(1 + D_1(L, d) \frac{R_f}{L} \right) \quad \text{avec} \quad D_1(L, d) = D_1^0 \left(1 - \frac{d}{L} \right) + 4V_f \frac{E_0}{E_m} \frac{d}{R_f} c_1^2 . \quad (G-5)$$

où les coefficients et propriétés du minicomposite considérés pour exprimer $D_1(L, d)$ sont rappelés dans l'Équation 1.81 p. 69. Finalement, on peut montrer que l'équation G-4 est satisfaite du fait que

$$n_{fissures} D_1(L, d_{moy}) = \sum_{k=1}^{n_{fissures}} D_1(L, d_k) . \quad (G-6)$$

Ceci prouve que le module du minicomposite endommagé peut s'exprimer par $E(L, d_{moy})$ où d_{moy} est la longueur de décohérence moyenne.

On propose à présent de **déterminer le comportement en traction σ/ε** à partir :

- de la connaissance de l'évolution de l'endommagement (L, d) donnée par les conditions d'amorçage et de propagation.
- de l'expression de la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$.

La modélisation prend en compte la fissuration matricielle obtenue lors du **chargement à déformation imposée**. Comme nous l'avons déjà montré, l'endommagement supplémentaire aboutit à une perte de rigidité juste après l'amorçage de la fissure matricielle (chapitre 2). Cela conduit à une chute de contrainte à déformation imposée.

Amorçage de la première fissure

Initialement, le minicomposite est considéré sans fissure. Son module longitudinal est E_0 . La première fissure peut être créée dans le bloc du minicomposite pour lequel la contrainte critique σ^c est minimale (tableau G-1). Ce bloc i est alors déterminé par $\sigma^c(i) = \min(\sigma^c)$. Juste avant l'amorçage de la fissure matricielle, la contrainte appliquée σ est la contrainte critique à l'amorçage de la fissure dans le bloc sélectionné, soit $\sigma = \sigma^c(i)$.

Donc, **juste avant l'amorçage de la première fissure**, la contrainte appliquée σ et la déformation ε se déterminent par

$$\sigma = \sigma^c(i) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^c = \frac{\sigma}{E_0} . \quad (\text{G-7})$$

où ε^c est la valeur de la déformation à l'amorçage de la fissure matricielle. Le nouveau pas de fissuration matricielle est $L = \frac{L_0}{2}$, L_0 étant la longueur du minicomposite.

Chute de contrainte

Etant donné qu'on modélise la réponse en traction avec un chargement imposé en déformation, l'amorçage de la fissure entraîne une **chute de contrainte** liée au surcroît d'endommagement. Ces chutes de contraintes peuvent être de grande amplitude.

On souhaite modéliser la chute de contrainte juste après l'amorçage de la fissure. La fissure matricielle peut s'accompagner de la décohésion interfaciale selon la valeur de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c . Si aucune décohésion ne se produit, la contrainte juste après l'amorçage de la fissure matricielle se détermine simplement par

$$\sigma = E(L) (\varepsilon^c - \varepsilon_r(L)) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon^c , \quad (\text{G-8})$$

où $E(L)$ et $\varepsilon_r(L)$ sont le module élastique et les déformations résiduelles du minicomposite contenant seulement les fissures matricielles (Équation 1.79, p. 68).

Si la décohésion se produit, dans ce cas on propose de calculer la contrainte juste après l'amorçage de la fissure en résolvant

$$\sigma \text{ tel que } \varepsilon(\sigma, L, d(\sigma)) = \varepsilon^c , \quad (\text{G-9})$$

en utilisant les expressions de $d(\sigma)$ (2.34) et de $\varepsilon(\sigma, L, d)$ (2.35).

La décohésion interfaciale qui accompagne la fissure matricielle se détermine alors par $d(\sigma)$ où σ est la contrainte juste après l'amorçage de la fissure matricielle.

Amorçage des fissures suivantes

On suppose qu'un nombre de fissures $n_{fissures}$ ont déjà été créées et que la condition de propagation de la décohésion est satisfaite. On note le pas de fissuration matricielle L_{avant} avec

$$L_{avant} = \frac{L_0}{n_{fissures} + 1} . \quad (\text{G-10})$$

On considère des longueurs de décohésion identiques au niveau de chaque fissure matricielle.

Chargement juste avant l'amorçage de la nouvelle fissure

Les décohésions se propagent avec le chargement de traction. On note $\sigma^c(i)$ la contrainte axiale, à l'amorçage de la nouvelle fissure dans le bloc i . La condition d'amorçage de la fissure a été décrit précédemment (p. 241).

Juste avant l'amorçage de la fissure matricielle, les longueurs de décohésion sont notées d_{avant} et sont calculées par

$$d_{avant} = d(\sigma^c(i)) , \quad (G-11)$$

et la déformation axiale ε^c se détermine à nouveau par

$$\varepsilon^c = \varepsilon(\sigma^c(i), L_{avant}, d_{avant}) . \quad (G-12)$$

Chute de contrainte

Les fissures matricielles déjà existantes sont donc accompagnées d'une décohésion de longueur d_{avant} au moment de l'amorçage de la nouvelle fissure. Juste après l'amorçage de la nouvelle fissure matricielle, la chute de contrainte résulte de la nouvelle fissure et de la nouvelle décohésion qui l'accompagne.

On appelle $d_{nouvelle}$ la longueur de décohésion au niveau de la nouvelle fissure matricielle. La nouvelle décohésion doit satisfaire la relation

$$d_{nouvelle} = d(\sigma) \text{ où } \sigma \text{ est la contrainte juste après l'amorçage.} \quad (G-13)$$

Il faut déterminer la chute de contrainte ainsi que la longueur de la nouvelle décohésion $d_{nouvelle}$. On note L le nouveau pas de fissuration matricielle.

Pour cela, on propose de considérer une décohésion moyenne, notée d_{moy} , définie par

$$d_{moy} = \frac{(n_{fissures} - 1) d_{avant} + d_{nouvelle}}{n_{fissures}} . \quad (G-14)$$

On calcule la contrainte juste après l'amorçage de la fissure matricielle en résolvant

$$\sigma \text{ tel que } \begin{cases} \varepsilon(\sigma, L, d_{moy}) = \varepsilon^c \\ d_{nouvelle} = d(\sigma) \end{cases} . \quad (G-15)$$

La nouvelle décohésion $d_{nouvelle}$ est de longueur plus faible que les décohésions pré-existantes à l'amorçage de la nouvelle fissure matricielle. La chute de contrainte engendrée donne une contrainte appliquée $\sigma < \sigma^c(i)$ où $\sigma^c(i)$ est la contrainte appliquée juste avant l'amorçage de la fissure matricielle. Ces chutes de contrainte sont nettement observables sur les courbes contrainte/déformation simulées, surtout lorsqu'on considère une longueur du minicomposite L_0 relativement faible.

Une fois la nouvelle fissure matricielle amorcée, un accroissement de la déformation appliquée ε entraîne la propagation de la nouvelle décohésion pour une contrainte appliquée σ supérieure à la contrainte déterminée lors de la chute de charge. Puis lorsqu'on obtient à nouveau $\sigma = \sigma^c(i)$, la nouvelle décohésion atteint la longueur d des décohésions préexistantes. A ce moment chacune des fissures matricielles est entourée par une décohésion de longueur d identique. Ensuite un chargement de traction encore plus élevé entraîne la propagation de chacune de ces décohésions toujours de même longueur.

Effet d'écran

La partie B concerne la détermination de σ et ε lors de l'amorçage de la fissure matricielle en présence de décohésion. La décohésion interfaciale se propage jusqu'à ce que la nouvelle fissure soit amorcée. Une fissure potentielle peut être créée dans le bloc du minicomposite pour lequel la contrainte critique σ^c est minimale. Ce bloc i est alors déterminé par $\sigma^c(i) = \min(\sigma^c)$. On remarque que parmi les blocs analysés, seuls ceux dans lesquels une fissure peut être amorcée sont pris en compte dans ce calcul. La contrainte appliquée à l'amorçage de la fissure matricielle est alors $\sigma = \sigma^c(i)$ et la longueur de décohésion juste avant l'amorçage de la fissure est $d(\sigma = \sigma^c(i))$.

Il convient ensuite de déterminer si la potentielle fissure dans ce bloc i se situe dans une zone de déchargement de la matrice. La matrice est déchargée sur une distance $d_r(\sigma, d) \geq d$ autour des fissures matricielles. d_r dépend de la contrainte appliquée σ et de la longueur de décohésion $d(\sigma)$. Nous avons déjà estimé par calcul EF que cette distance de déchargement après la fissure matricielle est d'au plus $d_r/2 \leq d/2 + 3R_f$. Le profil de déchargement de la matrice au voisinage de la fissure matricielle peut être déterminé de façon réaliste par les équations de McCartney ([Annexe A](#)). Ce modèle permet d'évaluer la répartition des contraintes dans la cellule élémentaire avec une interface frottante paramétrée par le coefficient de frottement μ .

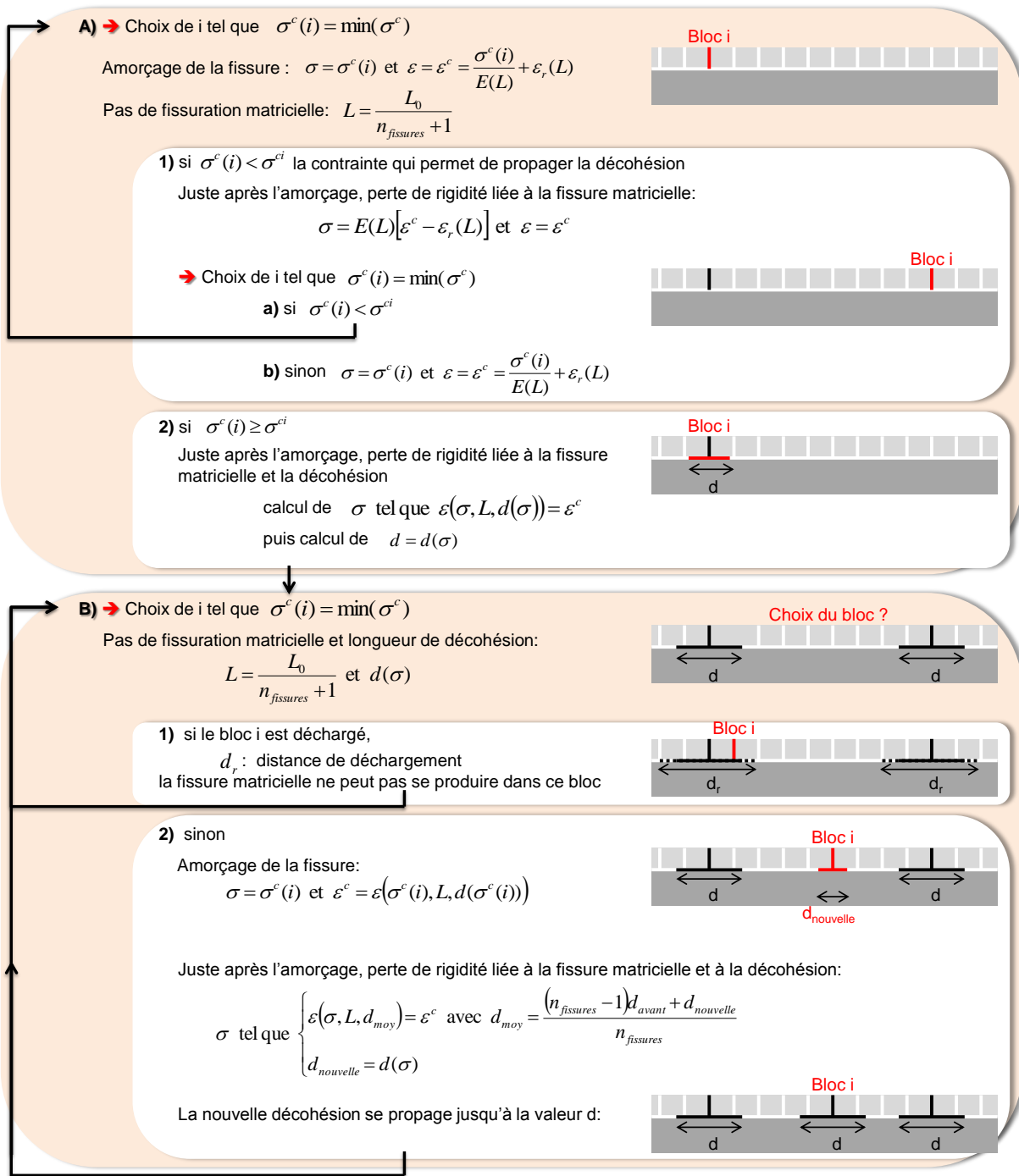
Un calcul de la position de la nouvelle fissure et des zones de déchargement permet de savoir si la nouvelle fissure se situe effectivement dans une de ces zones. Si c'est le cas la fissure ne peut être créée par cet effet d'écran. Un nouveau bloc et une nouvelle potentielle fissure sont sélectionnés en réitérant la même procédure.

L'algorithme développé permet alors de modéliser l'influence de la décohésion sur l'évolution de la densité de fissuration matricielle. L'effet d'écran entraîne un ralentissement de la fissuration matricielle jusqu'à la saturation de l'endommagement. Les boucles d'itérations sont arrêtées si au moins une des deux conditions est remplie :

- dans chacun des blocs du minicomposite, soit une fissure matricielle a été créée, soit la matrice du bloc est déchargée par la présence de la fissure matricielle.
- la décohésion a atteint la longueur L_0 du minicomposite.

Cet algorithme a été programmé à l'aide de Matlab et permet d'évaluer la réponse en traction ainsi que l'évolution de la densité de fissuration matricielle et de la longueur de décohésion au sein du minicomposite. On note que l'amorçage de fissures pendant la phase de refroidissement après l'élaboration du minicomposite n'est pas pris en compte. Ce mécanisme peut être facilement ajouté à l'algorithme présenté.

σ_{\max}	Liste des contraintes maximales supportées par la matrice dans chacun des bloc
G_i^c et μ	Energie de rupture de l'interface et coefficient de frottement
n_{fissures}	Nombre de fissures matricielles au cours du chargement
$\sigma^c = \sigma_{\max} \frac{1-V_f}{1-a_1 V_f} - \sigma^T$	Liste des contraintes appliquées à l'amorçage de la fissure matricielle dans chacun des blocs exprimées en fonction de la contrainte résiduelle σ^T
σ^{ci}	Contrainte qui permet de propager la décohésion
$d(\sigma)$	Expression de la longueur de décohésion
$\varepsilon(\sigma, L, d)$	Expression de la déformation axiale



Arrêt de l'algorithme lorsque:

Tous les blocs sont fissurés ou déchargés ou si la longueur de décohésion atteint toute la longueur L_0 du minicomposite

Tableau G-1 – Schéma de résolution du modèle de minicomposite en traction. On obtient la courbe de comportement σ/ε , l'évolution du pas de fissuration L et de la longueur de décohésion d .

Annexe H

Comparaison avec le modèle micromécanique de EVANS

Le modèle de [Vagaggini, Domergue et Evans, 1995] et [Evans et Zok, 1994] considère aussi le comportement non linéaire des composites à matrice céramique endommagés en traction soumis à la fissuration de la matrice et aux décohésions interfaciales. Une description des boucles d'hystérésis est faite. Le comportement σ/ε au cours des cycles est exprimé en fonction de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c comme le modèle ENDO-MINI, ainsi que du cisaillement interfacial caractéristique τ . On s'attache à présent à préciser exactement en quoi le modèle ENDO-MINI proposé diffère du modèle de EVANS. On s'intéresse en particulier aux équations des deux modèles.

D'une part, dans le cadre de ces travaux de thèse, les mécanismes de fissuration matricielle et de propagation de la décohésion ont été analysés à l'aide de calculs par Eléments Finis (chapitre 2 et 3). Au cours de cette analyse, les précédentes descriptions les plus marquantes des mécanismes de fissuration ont été exposées. Finalement un modèle semi-analytique est établi. Parmi les relations développées, certaines sont aussi utilisées dans le modèle de EVANS :

- Les contraintes résiduelles supportées par la fibre et la matrice ont été calculées par Eléments Finis et donnent des valeurs identiques aux expressions de [Lu et Hutchinson, 1995]. Evans utilise aussi ces expressions et la définition de la contrainte résiduelle σ^T .
- La propagation de la décohésion a d'abord été analysée par une approche énergétique basée sur la mécanique de la rupture. Le taux de restitution d'énergie au cours de la propagation de la décohésion a abouti sur la contrainte σ^{ci} appliquée sur le minicomposite qui autorise la propagation de la décohésion. On obtient une expression identique de σ^{ci} que [Hutchinson et Jensen, 1990]. Cette contrainte σ^{ci} dépend de l'énergie de rupture de l'interface G_i^c et de la contrainte résiduelle σ^T .
- Ensuite le modèle de EVANS fait intervenir le module noté E^* du minicomposite constitué uniquement des fissures matricielles sans décohésion interfaciale. Ce module E^* permet de quantifier la rigidité du minicomposite endommagé sans prendre en compte le glissement à l'interface le long de la décohésion. Avec les notations utilisées au cours de cette thèse, ce module $E^* = E(L)$ et dépend du pas de fissuration matricielle L . $E(L)$ s'exprime aussi en utilisant les travaux de [He, Wu, Evans et Hutchinson, 1994] avec

$$E(L) = \frac{E_0}{1 + D_1^0 \frac{R_f}{L}}, \quad (G-1)$$

où D_1^0 est le coefficient sans dimension identifié par calculs EF, qui traduit la perte de rigidité liée au déchargement de la matrice dans la zone endommagée autour de la fissure matricielle.

Une des premières différences entre les deux modèles est le calcul de la déformation appliquée $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de la contrainte σ . Nous avons exprimé la déformation axiale $\varepsilon(\sigma, L, d)$ après avoir décrit l'état de contrainte dans le minicomposite au voisinage des fissures (Équation 2.35, p. 107).

Evans quant à lui détermine la déformation ε en dissociant la déformation élastique, uniquement liée à la perte de rigidité engendrée par la fissuration matricielle, et la déformation liée au glissement frottant le long de la décohésion. La déformation ε ainsi divisée devient

$$\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^s + \frac{\sigma}{E^*} . \quad (\text{G-2})$$

La déformation élastique est donnée par $\frac{\sigma}{E^*}$ calculée à partir du module $E^* = E(L)$ sans prendre en compte la décohésion interfaciale. La déformation inélastique ε^s ("sliding") résulte de l'ouverture des fissures matricielles liées au glissement dans les zones de décohésions. Pour finir, la déformation inélastique ε^* représente la déformation résiduelle du minicomposite contenant uniquement les fissures matricielles, sans décohésion, soit $\varepsilon^* = \varepsilon_r(L)$.

Pour déterminer la déformation appliquée ε à l'aide de l'équation G-2, Evans utilise une autre expression de la déformation ε^s établie à partir de l'ouverture de la fissure matricielle $\Delta U(\sigma)$. Cette expression de l'ouverture de la fissure matricielle est donnée par [Marshall, 1992] en fonction de la contrainte appliquée et du cisaillement interfacial τ avec

$$\Delta U(\sigma) = 2 \frac{R_f c_1^2}{\tau E_m} \left(\sigma - \sigma^{ci} \right) \left(\sigma + \sigma^{ci} + 2\sigma^T \right) , \quad (\text{G-3})$$

au cours du chargement de traction monotone. [Marshall, 1992] décrit en fait l'évolution de l'ouverture de la fissure matricielle au cours d'une boucle d'hystérésis. La contrainte σ^{ci} qui permet de propager la décohésion interfaciale à partir de G_i^c et la contrainte résiduelle σ^T sont employées. La déformation inélastique ε^s obtenue par Evans est donnée par

$$\varepsilon^s = \frac{b_2 (1 - a_1 V_f)^2 R_f}{2L\tau E_m V_f^2} \left(\sigma - \sigma^{ci} \right) \left(\sigma + \sigma^{ci} + 2\sigma^T \right) . \quad (\text{G-4})$$

Le coefficient a_1 a déjà été défini et le coefficient b_2 dépend des caractéristiques du minicomposite avec

$$b_2 = \frac{(1 + \nu) E_m \{ 2(1 - \nu)^2 E_f + (1 - 2\nu) [1 - \nu + V_f (1 + \nu)] (E_m - E_f) \}}{(1 - \nu) E_f [(1 + \nu) [(1 - V_f) E_f + V_f E_m] + (1 - \nu) E_m]} . \quad (\text{G-5})$$

La somme des déformations ε^s (éq G-4), de la déformation élastique $\frac{\sigma}{E^*}$ et de la déformation résiduelle ε^* permet à Evans d'écrire la déformation appliquée $\varepsilon(\sigma)$ à partir de l'énergie G_i^c et du cisaillement τ par

$$\varepsilon = \frac{b_2 (1 - a_1 V_f)^2 R_f}{2L\tau E_m V_f^2} \left(\sigma - \sigma^{ci} \right) \left(\sigma + \sigma^{ci} + 2\sigma^T \right) + \frac{\sigma}{E_0} \left(1 + D_1^0 \frac{R_f}{L} \right) + \frac{\sigma^T}{E_0} D_1^0 \frac{R_f}{L} , \quad (\text{G-6})$$

où L est le pas de fissuration matricielle. On observe que la longueur de décohésion d n'intervient pas dans cette expression de ε (G-6).

Au final, les deux relations de la déformation ε sont différentes, l'une établie à partir d'une écriture analytique de l'ouverture de fissure matricielle (EVANS G-6), l'autre dépendant des propriétés mécaniques du minicomposite endommagé calculées par EF puis exprimées à l'aide des relations semi-analytiques (ENDO-MINI, Équation 2.35). Les propriétés mécaniques du minicomposite endommagé sont écrites à partir de la connaissance de la densité de fissuration matricielle et de la longueur de décohésion.

Pour mettre en œuvre le modèle ENDO-MINI, la première étape consiste à évaluer la densité de fissures matricielles $\rho(\sigma)$ et la longueur de décohésion $d(\sigma)$ en fonction de la contrainte appliquée σ . Les propriétés à rupture de la matrice et de l'interface sont utilisées. La multifissuration de la matrice est modélisée à l'aide d'une distribution aléatoire des contraintes à rupture de la matrice par la statistique de Weibull. Evans propose d'utiliser la densité de fissuration matricielle observée expérimentalement. Une loi linéaire de l'évolution de la densité de fissuration en fonction de σ est formée à partir de la contrainte appliquée à l'amorçage des premières fissures et de la densité de fissuration matricielle à saturation de l'endommagement. Ces valeurs sont estimées expérimentalement.

De plus, le modèle de EVANS ne présente pas de loi de propagation de la décohésion $d(\sigma)$. La déformation ε est calculée à partir de G_i^c et du cisaillement interfacial τ , sans connaître la longueur de décohésion.

Evans a développé ce modèle principalement pour la **description des boucles d'hystérésis**. L'évolution de l'ouverture de la fissure matricielle ([[Marshall, 1992](#)]) au cours du déchargement puis du rechargement est utilisée pour exprimer le comportement σ/ε de la boucle. Le module tangent au cours de la boucle a été décrit par Evans en considérant le module E^* au début du déchargement et du rechargement ainsi que le module E^p en fin de déchargement et de rechargement (chapitre 2 section [VI.2](#), page [100](#)). Les boucles peuvent avoir une forme entièrement parabolique ou bien se terminer par une partie linéaire en fin de déchargement et de rechargement. Ces deux catégories de boucles sont différenciés par l'énergie de rupture de l'interface G_i^c [[Marshall, 1992](#)] : un G_i^c faible entraînera une boucle de forme entièrement parabolique. Si l'énergie G_i^c est suffisante, le comportement se termine par une partie linéaire et une contrainte de transition entre le comportement parabolique et linéaire est mise en présence et exprimée à partir de la contrainte σ^{ci} . D'autre part, le cisaillement interfacial τ est identifié à l'aide des mesures du pas de fissuration et du comportement σ/ε au cours de boucles.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, les boucles d'hystérésis sont modélisées par EF en connaissant le pas de fissuration matricielle et la longueur de décohésion au début du déchargement. Les contraintes résiduelles sont prises en compte, le contact à l'interface fibre matrice est considéré et le comportement frottant est modélisé par la loi de Coulomb. Le coefficient de frottement μ est une caractéristique intrinsèque du minicomposite. Il ne dépend ni du chargement de traction, ni de la fraction volumique de fibres V_f .

Enfin, on note que des expressions directes de la densité de fissuration $\rho(\sigma)$, de la longueur de décohésion $d(\sigma)$, des propriétés mécaniques du minicomposite endommagé et de la déformation appliquée $\varepsilon(\sigma)$ sont proposées.

Bibliographie

- EVANS, A. G. et F. W. ZOK. 1994, «The physics and mechanics of fibre-reinforced brittle matrix composites», *Journal of Materials Science*, vol. 29, n° 15, p. 3857–3896. URL <http://dx.doi.org/10.1007/bf00355946>.
- HE, M. Y., B. X. WU, A. G. EVANS et J. W. HUTCHINSON. 1994, «Inelastic strains due to matrix cracking in unidirectional fibre-reinforced composites», *Mechanics of Materials*, vol. 18, n° 3, p. 213–229. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636\(94\)90022-1](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(94)90022-1).
- HUTCHINSON, J. W. et H. M. JENSEN. 1990, «Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction», *Mechanics of Materials*, vol. 9, n° 2, p. 139–163. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90037-g](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6636(90)90037-g).
- LU, T. J. et J. W. HUTCHINSON. 1995, «Effect of matrix cracking and interface sliding on the thermal expansion of fibre-reinforced composites», *Composites*, vol. 26, n° 6, p. 403–414. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4361\(95\)90913-k](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4361(95)90913-k).
- MARSHALL, D. B. 1992, «Analysis of fiber debonding and sliding experiments in brittle matrix composites», *Acta metall. mater.*, vol. 40, n° 3, p. 427–441. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0956-7151\(92\)90391-q](http://dx.doi.org/10.1016/0956-7151(92)90391-q).
- VAGAGGINI, E., J. DOMERGUE et A. G. EVANS. 1995, «Relationships between hysteresis measurements and the constituent properties of ceramic matrix composites : I, Theory», *J. Am. Ceram. Soc.*, vol. 78, n° 10, p. 2709–2720. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1151-2916.1995.tb08046.x>.